

NIKOLA HAJDIN

TEORIJA

POVRSINSKIH

NOSACA

Ploče
napregnute na savijanje

Ploče
napregnute u svojoj ravni

Naučna Knjiga

Građevinski fakultet

DR NIKOLA HAJDIN

TEORIJA POVRŠINSKIH NOSAČA

PLOČE NAPREGNUTE NA SAVIJANJE
PLOČE NAPREGNUTE U SVOJOJ RAVNI

DRUGO IZDANJE

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Naučna Knjiga

BEOGRAD, 1989.

Akademik prof. dr Nikola Hajdin, dipl. inž.

TEORIJA POVRŠINSKIH NOSAČA

Izdavači
Građevinski fakultet
Beograd, Bulevar revolucije 73/1

IRO „Naučna knjiga“
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Pripremili za štampu
Prof. dr Dimitrije Dimitrijević
Prof. dr Branislav Kolundžija
Dušan Krajčinović

Odobreno za štampu od strane Komisije za izdavačku delatnost Građevinskog fakulteta u Beogradu na preporuku Katedre za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija

Za Građevinski fakultet
Glavni i odgovorni urednik
Dr Srdan Venečanin, docent

Tehnički urednik
Savatije Stojanović

Za IRO „Naučna knjiga“
Dr Blažo Perović

Urednik
Nikola Dončev

Tehnički urednik
Gradimir Savić

Korice
Miloš Majstorović

Tiraž 1.000 primeraka

ISBN 86-23-41030-0

Štampa
Štamparija „Bakar“ - Bor

PRVIDEO

PLOČE

1. OSNOVNI POJMOVI

Ploča je telo ograničeno sa dve paralelne ravni (osnove) i cilindričnom površinom upravnom na njih. Pri tome je rastojanje paralelnih ravni, odnosno debljina ploče h , mala u odnosu na druge linearne dimenzije ploče.

U našim primenama bavimo se i pločama kod kojih je debljina promenljiva, tj. pločama kod kojih osnove nisu paralelne. Sa većom ili manjom tačnošću i takve ploče se računaju na sličan način, a na osnovu istih pretpostavki kao i ploče konstantne debljine.

Srednja ravan ploče je ravan koja polovi debljinu ploče. Pri deformaciji ploče pod opterećenjem, ova ravan prelazi u elastičnu površinu ploče.

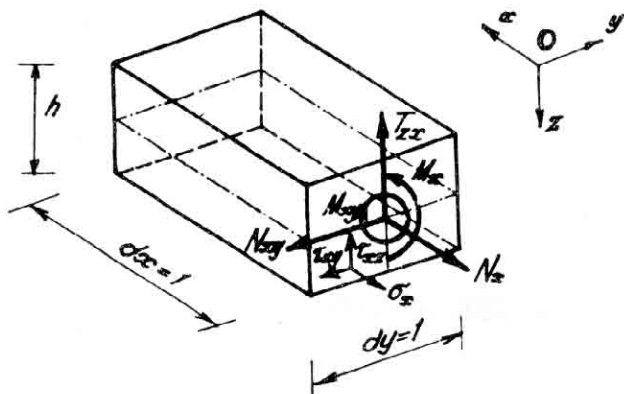
Kontura ploče je kriva, duž koje srednja ravan seče cilindričnu površinu koja ogradjuje ploču.

2. SILE U PRESEKU I VRSTE NAPREZANJA

U teoriji ploča, kao i u teoriji ljuski, uobičajeno je da se umesto komponentalnih napona u razmatranja uvode sile u preseku. Njih ćemo, slično kao i kod grednog nosača, definisa-

ti putem unutrašnjih sila, odnosno putem napona.

Isecimo iz ploče elemenat sa dva preseka paralelna sa ravni zy na međusobnom otstojanju dx i sa dva preseka paralelna ravni xz na otstojanju dy . (sl. 1)



Sl. 1.

Usvojeni pravougli koordinatni sistem Ox, y, z ima x i y ose u srednjoj ravni ploče, a z osa je orijentisana naniže.

U isečenom elementu posmatrajmo ravan sa normalom u pravcu x -ose u kojoj se javljaju komponentalni naponi σ_x , τ_{zx} , τ_{xy} .

Prema definiciji, redukcionni momenat i rezultanta unutrašnjih sila na jedinicu dužine elementa srednje ravni, odnosno njihove komponente u pravcu koordinatnih osa određene su sledećim izrazima:

Normalna sila (v. sl. 1) :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (I.1.)$$

momenat savijanja oko y -ose, odnosno momenat koji leži u ravni paralelnoj sa xz ravni :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (I.2.)$$

transverzalna sila :

$$T_{zx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz \quad (I.3.)$$

smičuća sila :

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (I.4.)$$

i torzioni momenat u ravni paralelnoj yz ravni :

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (I.5.)$$

Na sličan način su putem napona σ_y , τ_{yz} , τ_{yx} , definisane i sile u preseku sa normalom u pravcu y -ose - normalna sila :

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (I.6.)$$

momenat savijanja :

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (I.7.)$$

transverzalna sila :

$$T_{yz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (I.8.)$$

smičuća sila :

$$N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (I.9.)$$

torzioni momenat :

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (I.10.)$$

Na osnovu identičnosti izraza (I.4.) i (I.9.) kao i (I.5.) i (I.10.) izlazi da je:

$$N_{xy} = N_{yx} \quad \text{i} \quad M_{xy} = M_{yx}$$

Prema tome, kod ploče ukupan broj nepoznatih sila u presecima iznosi osam.

Složeno naprezanje ploče, pri kome se javljaju sve pobrojane sile u preseku, možemo da razložimo na dve vrste naprezanja i da ih zasebno tretiramo.

Za slučaj da se od svih pobrojanih sila u presecima ploče javljaju samo momenti savijanja, torzioni momenti i transverzalne sile, odnosno veličine:

$$M_x, M_{xy}, M_y, T_{zx}, T_{zy}$$

kažemo da je ploča napregnuta na savijanje.

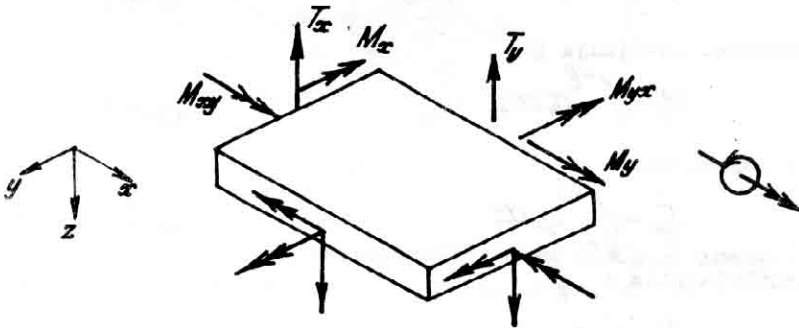
Ako se javljaju samo one sile koje leže u srednjoj ravni ploče, odnosno veličine:

$$N_x, N_{xy}, N_y$$

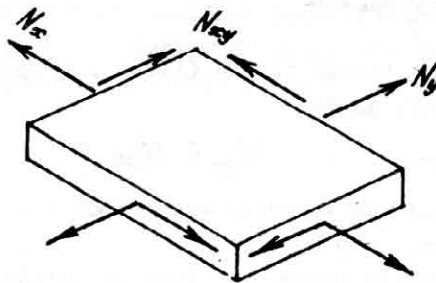
kažemo da je ploča napregnuta u svojoj ravni.

Naprezanje ploče u svojoj ravni obično se u teoriji elastičnosti naziva ravnim naprezanjem.

Ove dve vrste naprezanja su prikazane pregledno na isečenom elementu na slikama 2 i 3.



Sl. 2. Naprezanje na savijanje (savijanje ploče)



Sl. 3. Ravno naprezanje (naprezanje ploče u svojoj ravni)

SAVIJANJE PLOČA1. OPŠTE

Tačno izučavanje ploče kao prostornog tela svodilo bi se na rešavanje osnovnih jednačina Teorije elastičnosti. Taj put je veoma složen i nije našao svoju primenu kod ispitivanja ploča, izuzev kod razmatranja čisto teorijskih pitanja.

Savremenu teoriju savijanja ploča postavio je KIRCHHOFF (1850) na bazi hipoteza koje u izvesnom smislu pretstavljaju uopštavanje hipoteza koje se čine kod savijanja štapa. Te hipoteze su sledeće :

1. Linearni elemenat, upravan na srednju ravan pre deformacije, ostaje prav, nepromenjene dužine i upravan na deformisanu srednju ravan (elastičnu površinu) i posle deformacije.
2. Prilikom deformacije se ne menja dužina kao ni ugao između linijskih elemenata srednje ravni.
3. Normalni naponi σ_x za ravni paralelne sa srednjom ravni smatraju se malim u poredjenju sa ostalim komponentalnim naponima i mogu da se zanemare.

U zavisnosti od odnosa debljine ploče prema ostalim njenim dimenzijama navedene pretpostavke više ili manje odgovaraju stvarnom ponašanju ploče.

Grubo govoreći, ploče možemo da podelimo u tri grupe:

1. Veoma tanke ploče ili membrane, kod kojih je odnos debljine prema manjoj dimenziji u srednjoj ravni približno:

$$\frac{h}{b} \leq \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{100} \right)$$

Ovakve ploče imaju veoma malu krutost na savijanje, pa su kod njih pomeranja u pravcu normale na srednju ravan (ugibi), veliki u odnosu na debljinu ploče. Takve ploče, ako su na krajevima pričvršćene, "rade" uglavnom na zatezanje srednje ravni, deformišući njene elemente, pa druga hipoteza osta-

je neodrživa. Ove ploče - membrane, neće prema tome predstavljati predmet našeg izučavanja.

2. Tanke ploče, koje se negde nazivaju i ploče srednje debljine, sa odnosom:

$$\left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{100}\right) \leq \frac{h}{b} \leq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8}\right)$$

Ovakvim pločama je obuhvaćen najveći deo ploča koje nalaze primenu u građevinarstvu. Učinjene hipoteze, da su ugibi mali u odnosu na debljinu ploče, kao i da su deformacije elemenata srednje ravnj male, su umerene. Isto tako su i normalni naponi σ_x , sem nekih izuzetaka, mali u odnosu na druga dva normalna napona.

3. Debele ploče, kod kojih je:

$$\frac{h}{b} \geq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8}\right)$$

Kod ovih ploča zanemarivanje normalnih napona σ_x i dilatacija ϵ_x , kao i uvođenje pretpostavke o upravnosti normalne na srednju ravan i posle deformacije, dovodi do većih grešaka u odnosu na stvarno ponašanje.

2. TEORIJA SAVIJANJA TANKIH PLOČA

2.1. Deformacija ploče

Za izučavanje deformacije ploče poslužićemo se ranije spomenutim pravouglim koordinatnim sistemom Ox, y, z (Sl. 1).

Komponentalna pomeranja tačaka u pravcima Ox, Oy, Oz ćemo obeležiti sa u, v, w .

Iz pretpostavke o nepromenljivoj dužini linijskog elementa u pravcu z -ose i posle deformacije (prva hipoteza), sledi :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(I.11.)

odnosno

$$w = W(x, y)$$

Drugim rečima, pomeranja tačaka u pravcu z -ose, koja obično nazivamo ugibima ploče, ne zavise od položaja tačke u

odnosu na srednju ravan, već samo od koordinata x i y , ili - sve tačke koje leže na pravoj paralelnoj z -osi imaju isti ugib.

Iz prve hipoteze, s obzirom da linijski elemenat i posle deformacije ostaje prav i upravan na odgovarajuće linijske elemente u pravcima x i y ose, sledi da su klizanja γ_{xz} i γ_{zy} jednaka nuli, odnosno:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Iz ovih jednačina nalazimo :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (I.12.)$$

Integrišući jednačine po z i uzевši u obzir prilikom određivanja integracionih konstanti da je za $z=0$ i $u=v=0$, dobijamo :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (I.13.)$$

Pošto smo pomeranja u i v izrazili putem pomeranja w , možemo i sve komponentalne deformacije da izrazimo u funkciji samo jedne geometrijske veličine - pomeranja w :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (I.14.)$$

2.2. Komponentalni naponi

Koristeći generalisani Hooke-ov zakon, izrazićemo komponentalne napone putem komponentalnih deformacija. Polazeći od izraza, dobro poznatih iz Otpornosti materijala:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned}$$

i rešavanjem ovih jednačina po σ_x i σ_y , nalazimo :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

a iz veze $T_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$ direktno :

$$\tau_{xy} = G T_{xy}$$

Unoseći u ove izraze vrednosti za komponentalne deformacije prema (I.14), nalazimo:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] z \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] z \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \end{aligned} \quad (\text{I.15.})$$

2.3. Sile u preseku i uslovi ravnoteže

Koristeći ranije izvedene izraze za sile u preseku ploče u funkciji komponentalnih napona, konačne izraze za sile u preseku možemo dobiti preko parcijalnih izvoda funkcije ugiba ploče. Tako npr. :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

i slično tome :

$$\begin{aligned} M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Izraz $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ obeležavamo obično sa K i nazivamo krutošću ploče na savijanje, pa prethodne izraze možemo da napišemo u obliku :

$$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

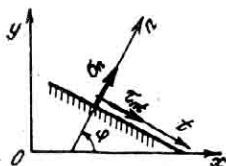
$$M_y = -K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.16a, b, c,})$$

$$M_{xy} = -K(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Sile T_x i T_y ne možemo da izrazimo direktno putem komponentalnih deformacija, odnosno komponentalnih pomeranja, jer smo u početku učinili pretpostavku da su komponentalne deformacije ϵ_{xx} i ϵ_{yy} jednake nuli. Izraze za ove sile dobićemo kasnije koristeći uslove ravnoteže.

Poznavajući vrednosti momenata za ravni paralelne koordinatnim osama, možemo da odredimo i vrednosti momenata za proizvoljnu ravan upravnu na Oxy ravan, čija normala zaklapa ugao φ sa x -osom (sl.4.).

Iz analize napona poznato je da su naponi σ_n i τ_{nt} za proizvoljnu ravan upravnu na Oxy ravan dati izrazima (sl.4.)



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Sl. 4.

Imajući u vidu izraze (I.2, I.5 i I.7) nalazimo :

$$M_n = \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\varphi + M_{xy} \sin 2\varphi$$

$$M_{nt} = \frac{1}{2} (M_x - M_y) \sin 2\varphi - M_{xy} \cos 2\varphi \quad (\text{I.17a, b,})$$

Isto tako možemo da odredimo i ekstremne vrednosti momenata savijanja:

$$\text{extr. } M_n = \frac{1}{2}(M_x + M_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2} \quad (\text{I.18.})$$

kao i ravni u kojima oni deluju :

$$\text{tg } 2\alpha_{1,2} = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (\text{I.19.})$$

Ekstremne vrednosti torzionog momenta biće :

$$\text{extr. } M_{\text{rot}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2} \quad (\text{I.20.})$$

Ovaj moment se javlja u ravni čija normala zaklapa ugao $\alpha_1 + 45^\circ$.

Ekstremne vrednosti napona u određenom preseku ploče možemo da dobijemo poznajući sile u preseku i debljinu ploče h . Deleći momente u preseku sa otpornim momentom preseka jedinične dužine $W = \frac{1}{6}h^3$, dobićemo za $z = \pm \frac{1}{2}h$ ekstremne vrednosti normalnih napona σ_x i σ_y i smičućeg napona τ_{xy} :

$$\text{extr. } \sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^3}$$

$$\text{extr. } \sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^3} \quad (\text{I.21a, b, c,})$$

$$\text{extr. } \tau_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^3}$$

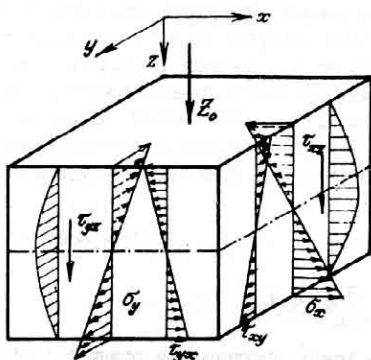
Ekstremne vrednosti smičućih napona τ_{xz} i τ_{yz} , s obzirom na paraboličnu promenu ovih napona^{+) po visini preseka, (sl.5), dobijamo za $z=0$:}

$$\text{extr. } \tau_{xz} = \frac{3T_x}{2h} \quad (\text{I.22a, b,})$$

$$\text{extr. } \tau_{yz} = \frac{3T_y}{2h}$$

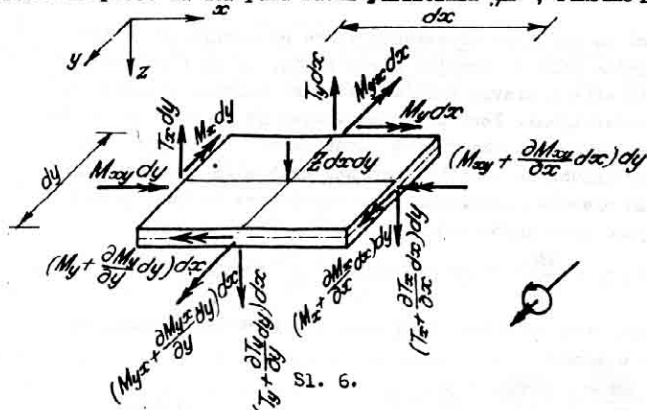
^{+) Parabolična raspodela smičućih napona τ_{xz} odn. τ_{yz} posledica je usvojenih pretpostavki o deformaciji ploče i može se dokazati na sličan način kao i kod grednog nosača.}

Na slici 5, na isečenom elementu ploče prikazana je promena komponentalnih napona po visini preseka.



Sl. 5.

Da bi smo dobili vezu izmedju sila u preseku i spoljašnjeg opterećenja, posmatraćemo diferencijalno mali element isečen iz ploče sa dva para ravni paralelnih yz , odnosno zx



Sl. 6.

ravni na rastojanju dx , odnosno dy , a opterećen proizvoljnim opterećenjem $Z(x,y)$ (sl.6.).

Na strani $x = \text{const}$ elementa ploče deluju momenti $M_x dy$ i $M_{xy} dy$ kao i sila u pravcu negativne z -ose veličine^{*)} $T_x dy$ (sl. 6).

Pri prelasku od preseka $x = \text{const}$ na presek $x + dx = \text{const}$ promeniće se ove statičke veličine za diferencijalno male vrednosti. Smatrajući da su sile u preseku i njihovi izvodi do reda koji nam je potreban neprekidne funkcije koordinata x i y , statičke veličine na strani $x + dx = \text{const}$ možemo da izrazimo putem odgovarajućih veličina na strani $x = \text{const}$ razvijajući ove u Taylor-ov red. Odbacujući male veličine višeg reda dobijamo :

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy ; \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy ;$$

$$\left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy$$

Analogno ovome imamo odgovarajuće momente i sile na stranama $y = \text{const}$ i $y + dy = \text{const}$ kako je to prikazano na sl. 6.

Pod dejstvom navedenih sila odnosno momenata posmatrani element može da bude u ravnoteži. Od ukupno šest nezavisnih uslova ravnoteže za telo u prostoru tri su identički zadovoljena.

Kako se prilikom naprezanja ploče na savijanje ne javljaju presečne sile u srednjoj ravni ploče, to su i uslovi ravnoteže svih sila u pravcu paralelnom sa x odnosno y -osom identički zadovoljeni. Isto tako zadovoljen je i uslov da je suma momenata svih sila oko z -ose ravna nuli.

Stavljajući da statički moment svih sila u odnosu na težišnu osu elementa paralelnu sa y -osom mora da bude jednak nuli dobijamo prvu jednačinu :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - T_x dx dy - \frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2} = 0$$

Zanemarujući male veličine višeg reda i deleći celu jednačinu sa $dx dy$ dobijamo :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \quad (I.23a)$$

*) Momenti su prikazani vektorima sa dve strelice i smer obrtanja je s desna ulevo gledajući od strelice ka početku vektora.

Na sličan način postavljajući uslov da je zbir statičkih momenata oko težišne ose elementa paralelne x -osi jednak nuli i da je zbir svih sila u pravcu težišne ose paralelne z -osi ravan nuli, dobijamo sledeće dve jednačine :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.23b,c,})$$

Iz prva dva uslova ravnoteže možemo da izrazimo transverzalne sile pomoću momenata, a ove putem već izvedenih izraza (I.16) u funkciji ugiba w :

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ T_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.24a,b,})$$

2.4. Diferencijalna jednačina ploče

Tri uslova ravnoteže (I.21a,b,c,) od kojih smo prva dva kasnije predstavili u drugačijem obliku (I.22a,b), kao i tri veze između sila u preseku i pomeranja w (I.16a,b,c), daju nam ukupno šest jednačina iz kojih možemo da odredimo šest nepoznatih funkcija :

$$M_x, M_{xy}, M_y, T_x, T_y \text{ i } w$$

Koristeći treći uslov ravnoteže

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + Z = 0$$

i unoseći u njega vrednosti za transverzalne sile (I.12a,b) :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + Z = 0$$

možemo problem ploče napregnute na savijanje da svedemo na jednu diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj w . Uvodeći u gornju jednačinu izraze (I.16a,b,c) za momente savijanja i torzijske momente, nalazimo :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K} \quad (\text{I.25a})$$

Ova jednačina se često piše u skraćenom obliku :

$$\Delta \Delta W = \frac{Z}{K} \quad (\text{I.25b})$$

Diferencijalnu jednačinu ugiba ploče prvi put je 1811 godine postavila francuska matematičarka Sophie Germain.

Opšte rešenje ove parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda ne postoji. Zavisno od uslova na konturi ploče, treba tražiti odgovarajuće partikularne integrale. Nažalost neznan broj ovih rešenja moguće je dobiti u konačnom i za tehničku primenu jednostavnom obliku.

Diferencijalnu jednačinu (I.25b) možemo da razložimo na dve diferencijalne jednačine drugog reda.

Napišaćemo prvo datu jednačinu u obliku :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{Z}{K}$$

Prema jednačini (I.16a,b) obrazovaćemo zbir :

$$M_x + M_y = -(1+\nu)K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

i izraz $\frac{M_x + M_y}{1+\nu}$ obeležiti sa M :

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = -K \Delta W. \quad (\text{I.26})$$

gde je $\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

Sa ovim možemo da formiramo dve diferencijalne jednačine drugog reda :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{K} \quad (\text{I.27a,b})$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -Z$$

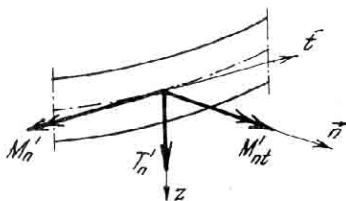
Rešavanje problema ploče putem ove dve jednačine je moguće samo ako su granični uslovi takvi da dozvoljavaju ovakvo rastavljanje.

2.5. Konturni uslovi

Na konturi ploče mogu biti zadati ili geometrijski uslovi oslanjanja (npr. ugib ili nagib tangente) ili statički uslovi (sile u preseku odnosno odgovarajuće linijsko opterećenje). Vrlo čest je slučaj da su konturni uslovi mešoviti tj. geometrijski i statički.

2.5.1. Statički uslovi na konturi

Razmotrićemo prvo slučaj kada su nam zadate statičke vrednosti na konturi. Po jedinici dužine konture s sa normalom \vec{n} i tangentom \vec{t} , kao statičke veličine se javljaju momenat oko ose t M_n' , momenat oko ose n M_{nt}' i sila T_n' u pravcu z ose. (sl. 7).



Sl. 7.

zazvali ovu pojavu.

Kirchhoff je 1850 godine pokazao da granični uslovi po M_{nt} i T_n moraju da budu zamenjeni jednim graničnim uslovom. Fizičko značenje ove zamene na način kako ćemo mi ovde pokazati, objasnili su Thompson i Tait, (1883).

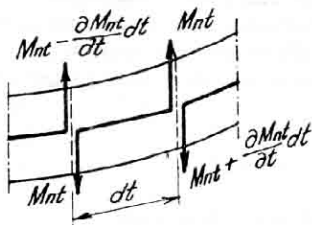
Torzioni momenat na linijskom elementu dužine dt , zamenićemo (v. sl.8) statički ekvivalentnim spregom vertikalnih sila veličine :

$$\frac{M_{nt} dt}{dt} = M_{nt}'$$

Prikažemo li te spregove sa odgovarajućim silama na jed-

Sile u preseku M_n , T_n i M_{nt} dobivene rešenjem diferencijalne jednačine, morale bi da se na konturi poklapaju sa zadatim opterećenjem konture. Nažalost rešenjem diferencijalne jednačine moguće je zadovoljiti samo dva konturna uslova. Takva nepotpunost rešenja dolazi otuda što smo osnovnim hipotezama uprostiti problem i time i-

nom delu konture, iz slike se vidi, da će se na svakom od elementarnih razmaka dt javiti razlike u silama veličine $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt$



Sl. 8.

Veličinu \bar{T}_n nazivamo zamenjujućom transverzalom silom. Pomoću nje se problem sa tri granična uslova svodi na dva i to na momenat savijanja M_n i zamenjujuću transverzalmu silu \bar{T}_n , pa imamo :

$$M_n = M_n'$$

$$1 \quad \bar{T}_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = T_n' + \frac{\partial M_{nt}'}{\partial t} \quad (I.29a, b)$$

Ako je kontura ploče slobodna, odnosno neopterećena, granični uslovi su sledeći :

$$M_n = 0$$

$$\bar{T}_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0 \quad (I.30a, b)$$

Pri ovoj zameni treba da se uoči da se na krajevima konture na kojoj se nalaze ove veličine, ovom zamenom javljaju koncentrisane sile veličine M_{nt} . Uopšte uzevši svaki skok u liniji torzionih momenata $M_{nt}^{(2)} - M_{nt}^{(1)}$ na konturi, izaziva pojavu koncentrisane sile P (sl. 9) veličine $P = M_{nt}^{(2)} - M_{nt}^{(1)}$.

Zamenjujući torzioni momenat statički ekvivalentnim spregom sila dobijamo izvesne razlike u pogledu naprezanja i deformacije. Medjutim prema Saint-Venant-ovom principu, dva međusobno statički ekvivalentna sistema, u ovom slučaju raspođeljeni torzioni momenat i linijsko opterećenje, daju razlike u naprezanjima čiji se uticaj rasprostire samo u uskoj zoni oko konture ploče.

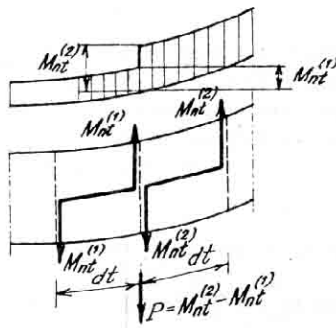
Za konture ploče $x = \text{const}$, odnosno $y = \text{const}$, izrazi za zamenjujuće transverzalne sile putem pomeranja glase :

Redukovano na jedinicu dužine ovo daje linijsko opterećenje veličine $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$ sa pravcem koji se poklapa sa pravcem dejstva transverzalne sile T_n . Zato ove dve veličine mogu da se saberu :

$$\bar{T}_n = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (I.28)$$

$$\bar{T}_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -K \left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$\bar{T}_y = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -K \left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (\text{I.31a,b})$$



Sl. 9.

Ako je na pr. kontura ploče $x = \text{const.}$ slobodna, odnosno neopterećena, onda na njoj moraju moment savijanja M_x i zamenjujuća transverzalna sila \bar{T}_x da budu jednaki nuli, što prema (I.16a) i (I.31a) daje :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.32a,b})$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0$$

2.5.2. Geometrijski uslovi na konturi

Geometrijski uslovi na konturi S obično se izražavaju preko funkcije w i njenih prvih parcijalnih izvoda.

Najčešće je to dato na sledeći način :

$$w = w'(s) \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)'(s) \quad (\text{I.33a,b})$$

gde su sa $w'(s)$ i $\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)'(s)$ obeležene zadate vrednosti ugiba i nagiba tangente na elastičnu površinu u pravcu normale n .

Za slučaj da je :

$$w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{I.34a,b})$$

kažemo da je ploča duž konture potpuno (totalno) uklještena.

Ako je ivica ploče uklještena, onda iz uslova da je duž ivice t ugib jednak nuli ($w = 0$), sledi :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \\ \text{pa uzimajući u obzir uslov } \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{ nalazimo :} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0 \quad (\text{I.35})$$

što znači da su torzioni momenti M_{nt} duž te ivice identički ravni nuli. Samim tim su i reakcije ploče po veličini ravne stvarnoj, a ne zamenjujućoj transverzalnoj sili.

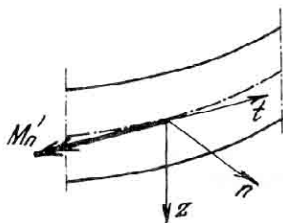
2.5.3. Mešoviti uslovi na konturi

Ako je jedan od konturnih uslova zadat po silama, a drugi geometrijski (odnosno po deformacijama) radi se, kao što smo već napomenuli, o mešovitim graničnim uslovima.

Najčešće su ovi uslovi zadati na sledeći način :

$$\begin{aligned} w &= w' \\ M_n &= M_n' \end{aligned} \quad (\alpha)$$

gde su w' i M_n' zadate vrednosti ugiba i sprega u ravni na konturi (s) (v.sl. 10).



Sl. 10.

Ako su ove vrednosti na konturi ravne nuli, tj.

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_n &= 0 \end{aligned} \quad (\beta)$$

smatramo da je ploča slobodno oslonjena duž te konture. Izraženi preko pomeranja w uslovi (β) glase:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.36 a, b})$$

gde su sa n obeleženi izvodi po normalni, a sa t po tangenti na konturnu liniju. Za slučaj da je ivica ploče slobodno oslonjena identički je zadovoljen uslov:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

pa je onda prema (I.36 b) i $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$.

Tako se sada konturni uslovi za pravu, slobodno oslonjenu ivicu ploče mogu u Dekartovom koordinatnom sistemu x, y da

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

ili, ako je ivica ploče paralelna y -osi :

$$W = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

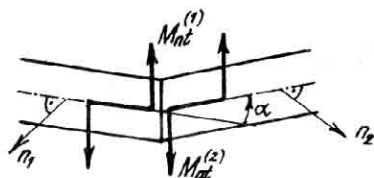
(I.37a,b)

Granični uslovi u ovom obliku poznati su kao Navier-ovi granični uslovi.

2.5.4. Sile u uglovima ploče

Pogmatrajmo ploču sa proizvoljnom poligonalnom konturom.

Ako je kontura ploče slobodna (odnosno neopterećena) javiće se na krajevima pravog dela odnosno u uglu ploče, koncentrisane sile kao rezultat zamenjujućeg dejstva torzionih momenta (sl. 11).



Sl. 11.

Razlika sila $M_{nt}^{(1)}$ i $M_{nt}^{(2)}$ je pri prelasku iz ravni sa normalom n_1 , na ravni sa normalom n_2 u opštem slučaju koeficijentna i daje jednu koncentrisanu silu u uglu ploče veličine :

$$P = M_{nt}^{(2)} - M_{nt}^{(1)}$$

Granične uslove (I.30a,b) treba dopuniti još po jednim uslovom u svakom uglu ploče :

$$P = M_{nt}^{(2)} - M_{nt}^{(1)} = 0 \quad (\alpha)$$

U specijalnom slučaju ako je ugao α između strana prav, iz uslova konjugovanosti smičućih napona nalazimo

$$M_{nt}^{(1)} = -M_{nt}^{(2)}$$

pa se granični uslov (α) svodi na

$$P = 2M_{nt} = 0$$

odnosno

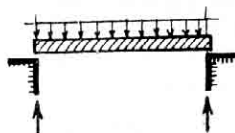
$$M_{nt} = 0 \quad (\text{I.38})$$

U uglovima slobodno oslonjene poligonalne ploče javiće se takođe koncentrisane sile veličine :

$$P = M_{nt}^{(2)} - M_{nt}^{(1)}$$

Zamenjujuće transverzalne sile \bar{T}_n stajajuće u ravnoteži sa reakcijama ploče na pravom delu konture, a na uglovima će se javiti reaktivne koncentrisane sile jednake po veličini i pravcu silama P a suprotnog smera.

U vezi sa ovim postavlja se pitanje karaktera slobodnog oslanjanja ploče. Ako je na primer jedna pravougaona ploča oslonjena duž horizontalne konture samo naleganjem i opterećena prema slici 12, granični uslovi za slučaj da se na uglovima



Sl. 12.

dobijaju sile P sa smerom na gore (kao što se upravo i dešava) neće biti ispunjeni.

Prema tome, za praktičnu primenljivost izvedenih zaključaka o graničnim uslovima, potrebno je da se konstruktivnim merama omogući prijem sile oba smera na konturi. Radi sprečavanja odizanja ploče na uglovima, ovi se kod armirano betonskih ploča ankerovanjem pričvršćuju za podlogu.

3. PRAVUGAONA PLOČA SLOBODNO OSLO NJENA PO KONTURI

NAVIER-ovo REŠENJE

3.1. Rešenje zadatka za proizvoljno opterećenje

Problem savijanja ploče, kao što smo napred videli, svodi se na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda :

$$\Delta^2 W = \frac{F}{K}$$

uz odgovarajuće konturne uslove.

Za slučaj pravougaone ploče slobodno oslonjene po konturi (sl. 13), konturni uslovi su :

Za $x=0$ i $x=a$.

$$w=0 ; M_x=0$$

odnosno: $w=0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$

Isto tako i za:

$$y=0 \text{ i } y=b$$

$$w=0 ; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

Rešenje koje ćemo ovde prikazati za slučaj proizvoljnog opterećenja $Z(x,y)$ pripada Navier-u (1823) i dobija se primenom dvostrukih Fourier-ovih redova.

Ordinate elastične površine odnosno rešenje jednačine, pretpostavićemo u obliku dvostrukog reda :

$$W(x,y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.39)$$

gde su a i b strane ploče paralelne koordinatnim osama x , odnosno y , a A_{mn} zasad nepoznati koeficijent. Ovako izabrani oblik rešenja zadovoljava granične uslove.

Obeležavajući sa W_{mn} pojedini član ovog reda :

$$W_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.40)$$

jednačinu (I.37) možemo u razvijenom obliku da napišemo u obliku :

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} = W_{11} + W_{12} + \dots + W_{1n} + \\ &+ W_{21} + W_{22} + \dots + W_{2n} + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ W_{m1} + W_{m2} + \dots + W_{mn} \end{aligned}$$

U zavisnosti od konvergencije reda, što je pak zavisno od prirode koeficijenta W_{mn} , za praktičan račun se zadovoljavamo sa ograničenim brojem članova.

Kako rešenje zadatka, pored graničnih uslova mora da zadovolji i samu diferencijalnu jednačinu, to ćemo potražiti odgovarajuće izvođe funkcije :

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} = A_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$2 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} = 2A_{mn} \frac{\pi^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} = A_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Tako nalazimo :

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} = A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Sastavimo sada dvostruki trigonometrijski red i unesimo ga u diferencijalnu jednačinu :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{K} Z(x, y) \quad (I.41)$$

Iz ove jednačine treba odrediti vrednost koeficijenta A_{mn} . Da bi to uradili potrebno je i desnu stranu jednačine prikazati u obliku dvostrukog trigonometrijskog reda. Drugim rečima potrebno je opterećenje $Z(x, y)$ u oblasti zadane pravougaone ploče razviti u dvostruki Fourier-ov red :

$$Z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.42)$$

Da bi smo odredili koeficijent Z_{mn} , i levu i desnu stranu jednačine (I.42) pomnožićemo sa $\sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$, gde su r i s celi brojevi, a zatim ćemo integraliti od 0 do a , odnosno od 0 do b :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b Z(x, y) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

Pri ovome je :

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{r\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{za } m=r \\ 0 & \text{za } m \neq r \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{b}{2} & \text{za } n=s \\ 0 & \text{za } n \neq s \end{cases}$$

tako da imamo :

$$\int_0^a \int_0^b Z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} Z_{mn}$$

odnosno :

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b Z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (I.43)$$

Putem ovog izraza možemo bilo koje opterećenje razviti u red.

Vnoseći sada, izraz (I.42) u jednačinu ploče (I.41) i upoređujući koeficijente uz iste članove reda sa leve i desne

strane, nalazimo :

$$A_{mn} = \frac{Z_{mn}}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 K}$$

odnosno, ako unesemo vrednost (I.43) za Z_{mn}

$$A_{mn} = 4 \frac{\int_0^a \int_0^b Z(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{K \pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (\text{I.44})$$

Ovako nadjen koeficijent možemo da unesemo u izraz (I.39) i time dobijemo rešenje zadatka za proizvoljno opterećenje :

$$w(x,y) = \frac{4}{K \pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{\int_0^a \int_0^b Z(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.45})$$

3.2. Ravnomerno podeljeno opterećenje

Za slučaj ravnomerno podeljenog opterećenja Z_0 ($Z(x,y) = \text{const} = Z_0$) integral na desnoj strani izraza (I.45) razlaže se na proizvod dva integrala :

$$Z_0 \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

Za parne vrednosti m i n , $A_{mn} = 0$, dok je za neparne :

$$A_{mn} = \frac{16Z_0}{K \pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

pa je rešenje :

$$w(x,y) = \frac{16Z_0}{K \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.46})$$

($m=1,3,5\dots$) ($n=1,3,5\dots$)

Maksimalni ugib ploče nalazi se u centru i dobija se iz izraza (I.45) zamenom $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$:

$$w_{\max} = \frac{16Z_0}{K \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+n)-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (\text{I.47})$$

($m=1,3,5\dots$) ($n=1,3,5\dots$)

Ovaj red vrlo brzo konvergira. Tako, za kvadratnu ploču $a=b$, uzimajući samo prvi član ($m=1; n=1$), dobijamo:

$$w_{max} = \frac{4}{\pi^4} \frac{Z_0 a^4}{K} = 0,00416 \frac{Z_0 a^4}{K}$$

što prema tačnom rešenju (sa većim brojem članova reda)

$$w_{max} = 0,00406 \frac{Z_0 a^4}{K} \quad \text{daje grešku od oko 2,5 \%}$$

Iz rešenja izraz za momenat savijanja dobijamo prema (I.16):

$$M_x = \frac{16Z_0}{\pi^4} \frac{1}{a^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} (m^2 + \nu \frac{a^2}{b^2} n^2) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.48})$$

i slično za M_y i M_{xy} .

Za kvadratnu ploču, uzimajući samo prvi član reda, dobijamo u sredini ploče:

$$\max M_x = \max M_y = \frac{4Z_0}{\pi^4} a^2 (1+\nu)$$

$$\text{za } \nu = 0,3 \quad \max M_x = 0,0534 Z_0 a^2$$

$$\text{za } \nu = 0 \quad \max M_x = 0,0410 Z_0 a^2$$

Tačno rešenje, tj. rešenje sa većim brojem članova reda, daje:

$$\text{za } \nu = 0,3 \quad \max M_x = 0,0479 Z_0 a^2$$

$$\text{za } \nu = 0 \quad \max M_x = 0,0368 Z_0 a^2$$

Ovaj red već sporije konvergira, pa je razumljivo da je i greška veća (preko 10 %).

U prilogu su date tablice sa vrednostima maksimalnih ugiba i momenata savijanja za različite odnose strana a/b i za vrednost $\nu=0$, što je uobičajeno za armirani beton.

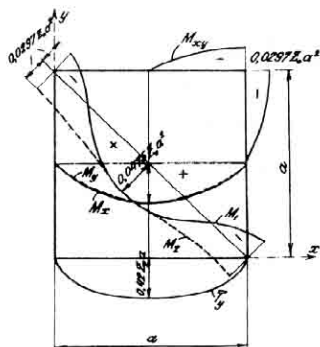
Na sl. 14 prikazani su dijagrami unutrašnjih sila kod kvadratne ploče opterećene jednako podeljenim opterećenjem, za $\nu=0,3$.

Dijagrami promene momenata savijanja za $y=const.$, odnosno $x=const.$ imaju približno paraboličan oblik.

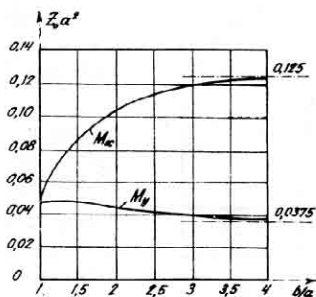
Na sl. 15 je prikazana promena momenata savijanja u funkciji odnosa strana b/a pri $\nu=0,3$. Iz ovoga dijagrama može da se zaključi da, ukoliko se odnos strane više razlikuje od jedinice, utoliko se više povećavaju momenti u pravcu kraće

strane u odnosu na momenat u pravcu duže strane.

Kad odnos strana $b/a \rightarrow \infty$, onda momenat M_x postaje



Sl. 14.



Sl. 15.

jednak momentu proste grede $M_x = 0,125 Z_0 a^2$, raspona a . Međutim, ploče u armiranom betonu odnosa strana $b/a > 2$ računaju se za slučaj ravnomernog opterećenja, ili uopšte opterećenja koje ne zavisi od y , u pravcu kraćeg raspona kao linijski nosač.

Na sl. 14 je dat duž dijagonale i dijagram glavnih momenata savijanja prema izrazu (I.18): $extr. M_n = M_{1,2} = M_x \pm M_{yx}$.

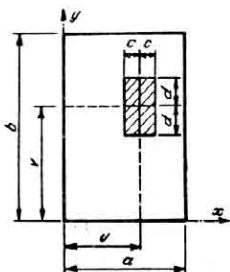
Pravac delovanja ovih momenata je pod 45° prema koordinatnim osama. Momenti savijanja se javljaju i u uglovima ploče i brojno su jednaki torzionom momentu: $extr. M_n = \pm M_{xy}$.

Torzioni momenti imaju najveće vrednosti u uglovima ploče, dok su na glavnim osama ploče ravni nuli.

Dijagram pritiska oslonakog pritiska \bar{T}_y dat je za $y=0$, a prema (I.31).

Prema ranije izloženom, u uglovima ploče se javljaju koncentrisane sile $P = 2M_{xy}$ uperene naviše.

3.3. Ravnomerno podeljeno opterećenje na pravougaoniku $2c \times 2d$ (sl. 16)



Opterećenje ploče dato izrazom :

$$Z(x,y) = Z_0 \quad \text{za} \quad \begin{aligned} u-c < x < u+c \\ v-d < y < v+d \end{aligned}$$

možemo prema (I.43) da razvijemo u red:

$$Z_{mn} = \frac{4Z_0}{ab} \int_{u-c}^{u+c} \int_{v-d}^{v+d} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Integraljenjem ovog izraza i unošenjem u (I.42) dobijamo :

Sl. 16.

$$Z(x,y) = \frac{16}{\pi^2} Z_0 \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{m\pi c}{a} \cdot \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{n\pi d}{b} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

($m=1,2,3\dots$ $n=1,2,3\dots$)

pa je rešenje dato izrazom :

$$w(x,y) = \frac{16Z_0}{k\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{n\pi d}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.49})$$

($m=1,2,3\dots$; $n=1,2,3\dots$)

3.4. Koncentrisana sila u tački

Iz izvedenog obrasca (I.49) u prethodnoj tački, možemo lako da dobijemo i jednačinu ugiba ploče slobodno oslonjene i opterećene koncentrisanom silom P u tački (u, v) . U tu svrhu pretpostavimo da se sila P na ploču prenosi kao jednako podeljeno opterećenje Z_0 preko pravougaonika $2c \cdot 2d$, ako da je:

$$P = 4cdZ_0$$

Izraz (I.49) ćemo napisati u nešto drugačijem obliku:

$$w(x,y) = \frac{4}{k\pi^4 ab} 4cdZ_0 \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Ako u ovom izrazu pustimo da c i d teže nuli, uz napomenu da je $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ i $4cdZ_0 = P$, dobićemo traženi ugib ploče opterećene koncentrisanom silom:

$$w(x,y) = \frac{4P}{8ab\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.50)$$

$(m=1,2,3\dots; n=1,2,3\dots)$

U tački $x=0$, $y=0$ ovaj red je divergentan, što znači da se u tački u kojoj deluje sila pojavljuje ugib beskonačne vrednosti. Slično je i sa izrazom za momenat:

$$M_x = \frac{4P}{ab\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + n^2}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.51)$$

Ova nelogičnost se javlja zato što u ovoj tački nije zadovoljena treća osnovna pretpostavka da su naponi σ_x zanemarljivi u odnosu na ostala dva komponentalna napona. Kako se u praksi rešava ovo pitanje, biće reči u poglavlju 8.

4. PRAVOUGAONE PLOČE SA PAROM PARALELNIH SLOBODNO OSLONJENIH IVICA.- M. LEVY-ovo REŠENJE

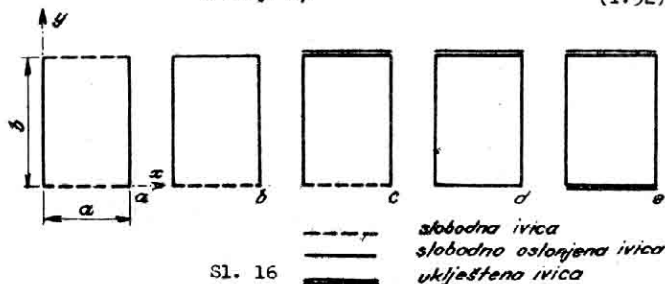
Navier-ovo rešenje ima jednostavan oblik, ali redovi koji se pri tome dobijaju nisu uvek dovoljno brzo konvergentni za numeričko računanje. Osim toga ovo rešenje može da se koristi u prikazanom obliku samo za slobodno oslonjenu ploču, a ne i za druge granične uslove.

Pravougaone ploče kod kojih su dve naspramne ivice ($x=0$, $x=a$) slobodno oslonjene, mogu da se računaju na bazi tzv. Levy-evog rešenja (1899), nezavisno od toga kakvi su granični uslovi na drugim dvema ivicama. U takve ploče spadaju ploče sa graničnim uslovima prikazane na sl. 16.

Ovo je rešenje, za razliku od Navier-ovog, dato jednodstrukim redovima. Razumljivo je, da se ovim rešenjem može da analizira i ploča slobodno oslonjena na sve četiri strane.

Rešenje se traži u obliku :

$$W = W_0 + W_1 \quad (\text{I.52})$$



gde je W_0 partikularni integral diferencijalne jednačine $\Delta \Delta W = \frac{Z}{K}$ koji zadovoljava granične uslove samo na stranama $x=0$ i $x=a$, a W_1 rešenje homogene diferencijalne jednačine :

$$\Delta \Delta W_1 = 0 \quad (\text{I.53})$$

koje u kombinaciji sa W_0 zadovoljava sve granične uslove.

Rešenje W_1 traži se u obliku jednostrukog reda :

$$W_1 = \sum_n Y_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{I.54})$$

gde je Y_n funkcija samo promenljive y . Unošenjem ovog izraza u diferencijalnu jednačinu dobijamo za svaki član reda, posle skraćivanja sa $\sin \frac{n\pi x}{a}$, običnu diferencijalnu jednačinu:

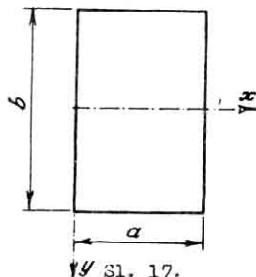
$$Y_n^{IV} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y_n'' + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y_n = 0$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine glasi :

$$Y_n = (A_n + \frac{n\pi y}{a} B_n) Ch \frac{n\pi y}{a} + (C_n + D_n \frac{n\pi y}{a}) Sh \frac{n\pi y}{a} \quad (\text{I.55})$$

4.1. Ravnomerno podeljeno opterećenje

U slučaju ravnomerno podeljenog tereta, usvajajući koordinatni sistem, prikazan na sl. 17, za partikularno rešenje možemo da uzmemo ugib trake raspona a :



Sl. 17.

$$w_0 = \frac{Z_0}{24K} (x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

Diferenciranjem možemo lako da se uverimo da je diferencijalna jednačina zadovoljena i da ovo ustvari predstavlja rešenje jednačine za traku beskonačne dužine.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{Z_0}{K}$$

Za ploču simetrično oslonjenu u odnosu na x -osu možemo proizvoljno zadato opterećenje rastaviti na njegov simetričan i antisimetričan deo u pogledu na spomenutu osu, i za svaki deo opterećenja zasebno potražiti rešenje.

U tom slučaju za simetričan deo opterećenja biće u izrazu za w_1 konstante uz neparne funkcije ravne nuli, pa imamo

$$w_1 = \sum_n \left(A_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{I.56})$$

Za antisimetrični deo opterećenja moraju konstante uz neparne funkcije da budu jednake nuli, pa je :

$$w_1 = \sum_n \left(B_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + C_n \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{I.57})$$

Konstante A_n , B_n , C_n i D_n u opštem rešenju (I.55) određuju se tako da budu zadovoljeni konturni uslovi duž strana $y = \pm \frac{b}{2}$.

Da bi smo odredili konstante, potrebno je da se rešenje w_0 razvije u Fourier-ov red po sinusima. Za ravnomerno podeljeno opterećenje, w_0 razvijeno u red glasi :

$$w_0 = 4 \frac{Z_0 a^4}{K \pi^5} \sum_n \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{I.58})$$

($n = 1, 3, 5, \dots$)

4.1.1. Ploča slobodno oslonjena po konturi

Konturni uslovi na ivici $y = +\frac{b}{2}$ su :

$$w = 0 ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Za n -ti član reda nalazimo :

$$w_n = \left(4 \frac{E_0 \alpha^4}{K \pi^5 n^5} + A_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

i

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[A_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \left(2 \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{a}$$

pa nam granični uslovi daju dve jednačine za određivanje konstanti A_n i D_n :

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{Ch} \alpha_n + D_n \alpha_n \operatorname{Sh} \alpha_n + \frac{S}{n^5} &= 0 \\ A_n \operatorname{Ch} \alpha_n + D_n (2 \operatorname{Ch} \alpha_n + \alpha_n \operatorname{Sh} \alpha_n) &= 0 \\ &(n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

gde su uvedene oznake :

$$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a} , \quad S = 4 \frac{E_0}{K} \frac{a^4}{\pi^5}$$

Rešenjem gornjih jednačina dobijamo :

$$A_n = -\frac{1}{n^5} \frac{\alpha_n \operatorname{Th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{Ch} \alpha_n} S$$

$$D_n = \frac{1}{n^5} \frac{1}{2 \operatorname{Ch} \alpha_n} S$$

Sa ovim, jednačina elastične površine ima oblik :

$$\begin{aligned} w = \frac{4E_0 a^4}{\pi^5 K} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{\alpha_n \operatorname{Th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{Ch} \alpha_n} \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \operatorname{Ch} \alpha_n} \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (I.59)$$

4.1.2. Ploča ukliještena na krajevima $y = \pm \frac{b}{2}$

Konturni uslovi na krajevima $y = \pm \frac{b}{2}$

$$w = 0 , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

daju uslovne jednačine za određivanje konstanti :

$$A_n \operatorname{Ch} \alpha_n + B_n \alpha_n \operatorname{Sh} \alpha_n + \frac{S}{n^3} = 0$$

$$A_n \operatorname{Sh} \alpha_n + B_n (\alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n + \operatorname{Sh} \alpha_n) = 0 \quad n=1,3,5,\dots$$

Oдавде je :

$$A_n = -\frac{1}{n^3} \frac{\alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n + \operatorname{Sh} \alpha_n}{\alpha_n + \operatorname{Sh} \alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n} \cdot S$$

$$B_n = \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{Sh} \alpha_n}{\alpha_n + \operatorname{Sh} \alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n} \cdot S$$

Da ovim je rešenje diferencijalne jednačine :

$$W = \frac{4Z_0 a^4}{K \pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Sh} \alpha_n}{\alpha_n + \operatorname{Sh} \alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n} [(\alpha_n \operatorname{Ch} \alpha_n + 1) \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} - \frac{n\pi y}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a}] \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (1.60)$$

5. PRAVOUGAONA PLOČA SA RAZLIČITIM KONTURNIM USLOVIMA

Na osnovu M. Levy-evog rešenja moguće je, kao što smo već napomenuli, dobiti rešenje samo za slučaj da je ploča na dve naspramne strane prosto oslonjena. Različite druge, u praksi česte, vrste oslanjanja, kao napr. ploča uklještena na sve četiri strane, ili sa tri uklještena i jednom slobodnom ivicom, zahtevaju za njihovo rešavanje duži i komplikovaniji postupak.

Iz primera koje smo rasmatrali, mogu da se naslute putevi analitičkog rešavanja ploča. Mi se u druga rešenja nećemo upuštati jer bi to oduzelo dosta prostora, a ne bi donelo naročitu korist.

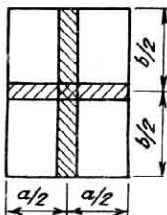
Veliki deo uobičajenih zadataka je tokom poslednjih 30-40 godina rešen i tabulisan, tako da se u mnogim konkretnim slučajevima možemo da poslužimo tim rešenjima. U prilogu su date tabele statičkih uticaja za najjednostavnije slučajeve opterećenja.

Za rešavanje obih zadataka koji nisu rešavani i tabulisani, a u praksi mogu da se jave, daleko su pogodniji numerički postupci.

Gledano istorijski, oba rešenja koja smo do sada prikali-

zali su relativno stara (1850 i 1899). Razvitak armiranog betona i u vezi sa tim masovna upotreba ploča u gradjevinarstvu zatekli su teoriju ploča uglavnom na ovim rešenjima, koja nisu mogla da zadovolje potrebe.

Nemački inženjer Marcus je pokušao numeričkim putem da rešava ploče različitih, za praksu važnih slučajeva oslanjanja. Uzimajući te radove kao kontrolu za tačnost, Marcus je predložio jednostavne formule za proračun pravougaonih ploča sa različitim uslovima oslanjanja.



Sl. 18.

Osnovna ideja na kojoj počivaju ti obrasci, jeste podela ploče na dve međusobno ortogonalne trake koje se u sredini ukrštaju (v.sl.18). Za ploče opterećene ravnomernim opterećenjem Z_0 , svakoj traci se daje neko konstantno opterećenje $1/2 p_x$, odnosno M_{py} . Pri tome je njihov zbir Z_0 . Upoređujući ugibe traka u sredini i procenjujući uticaj torzionih momenata koji preuzimaju jedan deo opterećenja na sebe, Marcus je dobio relativno jednostavne formule.

Na osnovu tih formula, kasnije je Löser napravio tabele kojima se i danas uglavnom služimo, tako da su ti numerički podaci za pravougaone ploče više poznati kao Löser-ove tabele, nego kao Marcus-ove formule.

Ovde ćemo navesti samo Marcus-ove formule za momente savijanja u sredini pravougaone ploče slobodno oslonjene na krajevima :

$$M_x \max = p_x \frac{a^2}{8} \nu \quad ; \quad M_y \max = p_y \frac{b^2}{8} \nu$$

$$\nu = 1 - \frac{5}{8} \frac{a^2 b^2}{a^4 + b^4}$$

$$p_x = \frac{b^4}{a^4 + b^4} \quad ; \quad p_y = \frac{a^4}{a^4 + b^4}$$

Tokom vremena, uradjen je čitav niz rešenja, pa su razumljivo dobijena tačna rešenja i za one slučajeve za koje je Marcus dao samo približne formule.

6. KRUŽNA PLOČA

6.1. Jednačina ploče u polarnim koordinatama

Za izučavanje deformacija i naprezanja kružne ploče poslužićemo se u ovu svrhu, pogodnijim polarnim koordinatama.

Transformacijom koordinata, moguće je iz izvedenih jednačina za pravougaonu ploču dobiti odgovarajuće jednačine i za kružnu ploču. Iada polarne koordinate čine specijalni vid krivolinijskih koordinata, one su u svakom slučaju opštiji vid ortogonalnih koordinata nego pravolinijske Dekartove koordinate, pa ćemo zato diferencijalnu jednačinu kružne ploče izvesti neposredno u ovim koordinatama.

Komponentalna pomeranja u pravcu radijusa ploče označićemo sa u , u pravcu tangente na koncentrični krug sa v i u pravcu normale na srednju ravan kao i ranije sa w (v. sl.19).

Kao i u pravouglim pravolinijskim koordinatama, shodno učinjenim hipotezama imamo :

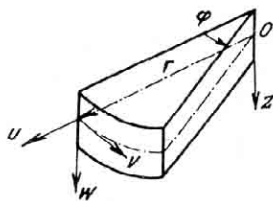
$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{odnosno} \quad w = w(r, \varphi)$$

Isto tako, klizanja između pravaca r i z , odnosno φ i z su ravna nuli, pa imamo :

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \gamma_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} = 0$$

Integracijom kao i ranije dobijamo :

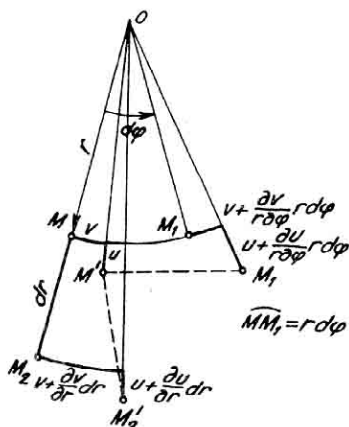
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial r} \quad , \quad v = -z \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \quad (\text{I.61})$$



Sl. 19.

6.1.1. Komponentalne deformacije, naponi i sile u preseku

Izrazi za komponentalne deformacije putem pomeranja u izabranom polarnom koordinatnom sistemu biće drugačiji od onih na koje smo navikli u pravolinijskim koordinatama. Ove izraze ćemo izvesti posmatrajući deformaciju elementarnih linijskih elemenata u pravcima r i φ , (v.sl.20).



Sl. 20.

Pomeranja tačke M u ravni $O r \varphi$ neka su u i v . Pomeranja tačke M_1 na rastojanju $r d\varphi$ će se razlikovati za priraštaje $\frac{\partial u}{\partial \varphi} r d\varphi$, odnosno $\frac{\partial v}{\partial \varphi} r d\varphi$. Isto tako pomeranje tačke M_2 na rastojanju dr u pravcu r razlikovaće se od pomeranja bliske tačke M za $\frac{\partial u}{\partial r} dr$, odnosno $\frac{\partial v}{\partial r} dr$.

Promena dužine dr kroz njenu prvobitnu dužinu, odnosno dilatacija u pravcu r , kao što se iz slike vidi, data je sa :

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{I.62})$$

Dilatacija u pravcu φ se sastoji iz dva dela. Prvi deo promene dužine $r d\varphi$ izazvan je razlikom pomeranja v tačaka M i M_1 :

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} r d\varphi - v}{r d\varphi} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

Sem ove promene u dužini elementa $r d\varphi$, postoji i promena dužine usled pomeranja u . Naime, usled pomeranja u , tačke elementa $r d\varphi$, zanemarujući male višeg reda, prelaze na krug poluprečnika $r+u$. Pa prema tome i dužina $r d\varphi$ postaje

$(r+u)d\varphi$. Razlika izmedju nove i prvobitne dužine, podeljena sa ovom poslednjom, daje drugi deo dilatacije :

$$\varepsilon_{\varphi}^{(2)} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}$$

pa je ukupna dilatacija u pravcu φ :

$$\delta_{\varphi} = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \quad (\text{I.63})$$

Klizanje, odnosno promenu prvobitno pravog ugla izmedju pravaca r i φ , nalazimo prema skici :

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial r} dr - \frac{v}{r}(r+dr)}{dr} + \frac{u + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} rd\varphi - u}{rd\varphi}$$

odnosno :

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \quad (\text{I.64})$$

Unoseći u jednačine za ε_r , ε_{φ} i $\gamma_{r\varphi}$ izraze za u i v putem W , imamo konačno :

$$\varepsilon_r = -Z \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \quad (\text{I.62a})$$

$$\varepsilon_{\varphi} = -Z \left[\frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{r \partial \varphi} \right) + \frac{\partial W}{r \partial r} \right] = -Z \left(\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (\text{I.63a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\varphi} &= -Z \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] = \\ &= -2Z \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.64a})$$

Veze izmedju napona i deformacija su prema Hooke-ovom zakonu :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_{\varphi})$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi} + \nu \varepsilon_r) \quad (\text{I.65a, b, c})$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (1-\nu) \gamma_{r\varphi}$$

Momente savijanja M_r i M_{φ} i momenat torzije $M_{r\varphi}$ možemo lako da dobijemo na osnovu definicije sila u preseku, a pre-

ko određenih integrala :

$$M_r = \int \sigma_r z dz \quad ; \quad M_\varphi = \int \sigma_\varphi z dz$$

$$M_{r\varphi} = \int \tau_{r\varphi} z dz$$

Ako komponentalne deformacije izrazimo putem pomeranja, dobićemo :

$$M_r = -K \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right]$$

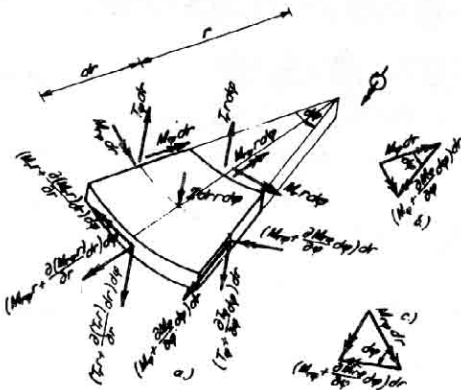
$$M_\varphi = -K \left[\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right]$$

$$M_{r\varphi} = -K(1-\nu) \left[r \frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{I.66a,b,c})$$

Izraze za transverzalne sile u funkciji pomeranja dobijamo kao i ranije preko uslova ravnoteže.

6.1.2. Uslovi ravnoteže i jednačina ploče

Da bi smo robili vezu izmedju sila u preseku i opterećenja, posmatraćemo element kružne ploče na sl. 21 opterećen proizvoljnim opterećenjem $Z(r; \varphi)$ isečen sa dve ravni kroz cen-



Sl. 21.

tar ploče upravne na srednju površinu, koje zatvaraju ugao $d\varphi$ i dve cilindrične površine na odstojanju dr .

Na strani elementa $r = \text{const.}$ deluje momenat savijanja $M_r d\varphi$, torzioni momenat $M_{r\varphi} r d\varphi$ i transverzalna sila $T_r d\varphi$ ⁺. Pri prelasku na stranu elementa $r + dr = \text{const.}$ menja se ne samo vrednost funkcije M_r , već i dužina linijskog elementa, tako da je ukupni priraštaj momenta $\frac{\partial(M_r \cdot r)}{\partial r} dr d\varphi$. Slično je i sa momentom torzije i transverzalnom silom.

Na strani elementa $\varphi = \text{const.}$ deluje momenat savijanja $M_\varphi dr$, torzioni momenat $M_{r\varphi} dr$ i transverzalna sila $T_r dr$. Pri prelasku na stranu $\varphi + d\varphi = \text{const.}$ sile dobijaju priraštaj samo usled promene koordinate φ .

Za određivanje veze između sila u preseku i opterećenja na raspoloženju nam stoje tri uslova ravnoteže. Kao prvo posmatraćemo statički momenat svih sila oko tangente na krug $r + \frac{dr}{2}$ u težištu elementa.

Radijalni momenti daju rezultujući momenat :

$$\frac{\partial(M_r \cdot r)}{\partial \varphi} dr d\varphi \quad (\alpha)$$

Torzioni momenti daju :

$$\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} dr d\varphi \cos \frac{d\varphi}{2} \quad (\beta)$$

Tangencijalni momenti na stranama $\varphi = \text{const.}$ i $\varphi + d\varphi = \text{const.}$ daju, zanemarujući vrednost priraštaja $\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$, prema slici (21b) rezultujući vektor u pravcu tangente :

$$-M_\varphi dr d\varphi \quad (\gamma)$$

Transverzalne sile T_r daju momenat :

$$-T_r r d\varphi dr \quad (\delta)$$

I ovde je vrednost priraštaja $\frac{\partial(T_r r)}{\partial r} dr$, kao mala veličina višeg reda, zanemarena u odnosu na $T_r r$.

Ako saberemo izraze (α) , (β) , (γ) i (δ) , vodeći računa da je za diferencijalno mali ugao $d\varphi \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$ i skratimo sa $dr d\varphi$ dobićemo jednačinu :

$$\frac{\partial(M_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - M_\varphi - T_r r = 0 \quad (\text{I.67a})$$

⁺ Momenti su prikazani vektorima sa dve strelice i smer obrtanja je sa desno u levo gledajući od strelice k početku vektora.

Na sličan način možemo postaviti i uslov da je statički momenat oko radijusa koji prolazi kroz težište elementa jednak nuli. Treba voditi računa da i torzioni momenti na stranama $\varphi = \text{const.}$ i $\varphi + d\varphi = \text{const.}$ prema sl. 21c daju rezultujućii momenat $M_{r\varphi} dr d\varphi$ oko pomenutog radijusa. Tako nam drugi uslov ravnoteže daje jednačinu :

$$\frac{\partial(M_{r\varphi}r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + M_{r\varphi} - T_{\varphi} \cdot r = 0 \quad (\text{I.67b})$$

I najzad iz uslova da zbir svih sila u pravcu Z -ose mora biti jednak nuli dobijamo :

$$\frac{\partial(T_r \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial T_{\varphi}}{\partial \varphi} + Zr = 0 \quad (\text{I.67c})$$

Ako iz prve jednačine izrazimo T_r , a iz druge T_{φ} , unoseći izraze za momente u funkciji pomeranja prema (I.66), dobićemo :

$$T_r = -K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$T_{\varphi} = -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right)$$

Uvodeći oznaku :

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}$$

prethodne izraze možemo da napišemo u obliku :

$$T_r = -K \frac{\partial}{\partial r} (\Delta W)$$

odnosno :

$$T_{\varphi} = -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta W) \quad (\text{I.68a, b})$$

Izraze (I.68) ćemo uneti u treći uslov ravnoteže, pa do-
jamo :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta W) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta W) \right] = \frac{Z}{K}$$

odnosno :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \varphi^2} \right) = \frac{Z}{K} \quad (\text{I.69})$$

Izvedena jednačina pretstavlja diferencijalnu jednačinu ploče u polarnim koordinatama.

6.2. Kružna ploča pri rotaciono simetričnom opterećenju

6.2.1. Opšti integral diferencijalne jednačine i sile u preseku

Ako je kružna ploča opterećena rotaciono simetričnim opterećenjem i ako su granični uslovi rotaciono simetrični, naprezanje i deformacije ploče ne zavise od ugla φ , pa se parcijalna diferencijalna jednačina (I.69) svodi na običnu diferencijalnu jednačinu po nezavisno promenljivoj r :

$$\left(\frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = \frac{Z}{K} \quad (\text{I.70})$$

ili napisano eksplicitno:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{Z}{K} \quad (\text{I.70a})$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine dato je zbirom partikularnog integrala w_0 date nehomogene jednačine i opšteg rešenja w_1 odgovarajuće homogene jednačine.

Drugi integral možemo da nadjemo slično kao i kod diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima uvodeći novu promenljivu zamenom $r = e^t$. Tako dobijamo:

$$\frac{d^4 w}{dt^4} - 4 \frac{d^3 w}{dt^3} + 4 \frac{d^2 w}{dt^2} = 0$$

Rešenje ove jednačine glasi:

$$w_1 = A + Bt + Ce^{2t} + Dte^{2t}$$

odnosno:

$$w_1 = A + B \lg r + Cr^2 + Dr^2 \lg r$$

Mesto promenljive r možemo da uvedemo bezdimenzionalnu promenljivu $\rho = \frac{r}{a}$, gde je a proizvoljna konstanta, a može da pretstavlja naprimer, poluprečnik kružne ploče. Sa ovom nomenom opšti integral jednačine (I.70) možemo da napišemo u obliku:

$$w = w_0 + C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \lg \rho + C_4 \lg \rho \quad (\text{I.71})$$

Za slučaj rotacione simetrije izrazi za sile u preseku (I.66) i (I.68) se svode na :

$$\begin{aligned} M_r &= -K \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\varphi &= -K \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ T_r &= -K \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = T_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.72a,b,c})$$

Diferenciranjem jednačine (I.71), imajući u vidu jednačinu (I.72), dobijamo izraze za $\frac{dw}{dr}$, M_r , M_φ i T_r :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{a} \left[\frac{dw_0}{d\rho} + 2C_2 \rho + C_3 \rho (1 + 2 \lg \rho) + C_4 \frac{1}{\rho} \right] \\ M_r &= -\frac{K}{a^2} \left\{ \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw_0}{d\rho} + (1+\nu) [2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} + 2 \lg \rho \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_4 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\rho^2}] \right\} \\ M_\varphi &= -\frac{K}{a^2} \left\{ \nu \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw_0}{d\rho} + (1+\nu) [2C_2 + C_3 \left(\frac{1+3\nu}{1+\nu} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \lg \rho \right) + C_4 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\rho^2}] \right\} \\ T_r &= -\frac{K}{a^2} \left(\frac{d^3 w_0}{d\rho^3} + \frac{d^2 w_0}{\rho d\rho^2} - \frac{dw_0}{\rho^2 d\rho} + 4C_3 \frac{1}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

6.2.2. Određivanje partikularnog integrala

Partikularni integral w_0 zavisi od opterećenja i može da se odredi neposredno putem integracije. U tu svrhu označićemo :

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{M}{K} \quad (\text{I.74})$$

pa diferencijalnu jednačinu (I.67) možemo da napišemo u obliku:

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = -Z \quad (\text{I.75})$$

odnosno :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -Z$$

$$111 : \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -Zr$$

Posle dve integracije po r biće :

$$M = -\int \frac{dr}{r} \int Zr dr \quad (I.76)$$

Jednačinu (I.74) isto tako možemo da napišemo u obliku:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{M}{K}$$

i posle dve integracije :

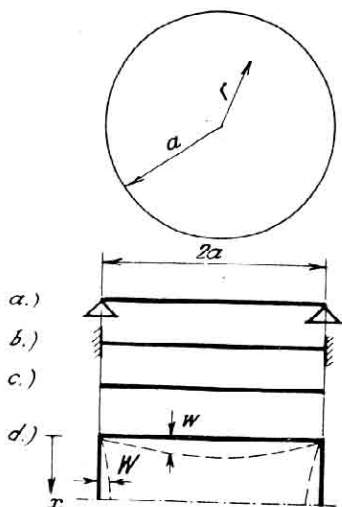
$$w_0 = -\frac{1}{K} \int \frac{dr}{r} \int M r dr \quad (I.77)$$

Za slučaj jednako podeljenog opterećenja $Z = Z_0$ biće :

$$M = -Z_0 \int \frac{dr}{r} \int r dr = -\frac{Z_0 r^2}{4}$$

$$w_0 = \frac{Z_0}{4K} \int \frac{dr}{r} \int r^3 dr = \frac{Z_0 r^4}{64K} = \frac{Z_0 a^4}{64K} \rho^4 \quad (I.78)$$

6.2.3. Konturni uslovi



Sl. 22.

Posmatrajući opšte rešenje diferencijalne jednačine (I.71) kao i izraze (I.73) dolazimo do zaključka da za $\rho=0$, tj. u centru ploče, ugibi i sile u preseku dobijaju beskonačne vrednosti nezavisno od opterećenja, ako je $C_3 \neq 0$ i $C_4 \neq 0$. Pošto ovi uticaji za kružnu ploču imaju konačne vrednosti, to logaritamski deo rešenja mora biti ravan nuli, odnosno mora da bude $C_3 = C_4 = 0$. Integracione konstante C_1 i C_2 odredjujemo iz uslova oslanjanja na kraju, tj. za $\rho=1$ (sl.22). Za slučaj slobodno oslonjene ploče (sl.22a) imamo sledeće konturne uslove :

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ M_r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ za } \rho = 1 \quad (\text{I.79a})$$

Za totalno uklještenje ploče (sl. 21b) konturni uslovi su sledeći :

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{dw}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ za } \rho = 1 \quad (\text{I.79b})$$

Na slobodnoj ivici ploče (sl. 22c) imamo uslove :

$$\left. \begin{aligned} M_r &= 0 \\ T_r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ za } \rho = 1 \quad (\text{I.79c})$$

Kod elastičnog uklještenja konture (sl. 22d), npr. u cilindru, polazimo od složenog rešenja oblika :

$$w = w_x + M w_x \quad (\text{I.80})$$

gde je w_x rešenje za slobodno oslonjenu ploču, w_x rešenje za ploču napadnutu jediničnim momentom po konturi, a M statički neodređena veličina - momenat uklještenja ploče u cilindru, koja se određuje iz uslova poklapanja deformacija cilindra i ploče.

6.2.4. Slobodno oslonjena ploča opterećena ravnomerno podeljenim opterećenjem

Sa nađenim partikularnim integralom za ravnomerno podeljeno opterećenje (I.78) i sa napomenama o konstantama \bar{C}_1 i \bar{C}_2 rešenje jednačine (I.70) glasi :

$$w = \frac{Z \alpha^4}{64K} (\rho^4 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \rho^2) \quad (\text{I.81})$$

Prema ovom rešenju momenat savijanja M_r je :

$$M_r = - \frac{Z \alpha^4}{16} \left[(3+\nu) \rho^2 + (1+\nu) \frac{1}{2} \bar{C}_2 \right]$$

Iz konturnih uslova (I.79a) određene su konstante \bar{C}_1 i \bar{C}_2 :

$$\bar{C}_1 = 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - 1$$

$$\bar{C}_2 = -2 \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

pa je rešenje :

$$w = \frac{Z_0 a^4}{16K} \left[(1-\rho^2)^2 + \frac{4(1-\rho^2)}{1+\nu} \right] \quad (\text{I.82})$$

Za sile u preseku dobijamo prema (I.73) :

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{Z_0 a^2}{16} (3+\nu)(1-\rho^2) \\ M_\varphi &= \frac{Z_0 a^2}{16} [(3+\nu) - \rho^2(1+3\nu)] \\ T_r &= -\frac{Z_0 a}{2} \rho \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

6.2.5. Ploča uklještena po konturi opterećena ravnomerno podeljenim opterećenjem

Integracione konstante \bar{C}_1 i \bar{C}_2 u opštem rešenju (I.81) odredjujemo prema konturnim uslovima (I.79b) :

$$\bar{C}_1 = 1 \quad \bar{C}_2 = -2$$

pa je rešenje :

$$w = \frac{Z_0 a^4}{64K} (1-\rho^2)^2 \quad (\text{I.84})$$

a sile u preseku su :

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{Z_0 a^2}{16} [(1+\nu) - (3+\nu)\rho^2] \\ M_\varphi &= \frac{Z_0 a^2}{16} [(1+\nu) - (1+3\nu)\rho^2] \\ T_r &= -\frac{Z_0 a}{2} \rho \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

Reakcije kružne ploče i u prvom i u drugom slučaju se nalaze jednostavno deljenjem ukupnog opterećenja R sa obimom ploče $2r\pi$:

$$A = \frac{R}{2\pi a} = \frac{Z_0 a}{2} \quad (\text{I.86})$$

6.2.6. Slobodno oslonjena ploča delimično opterećena ravnomerno podeljenim opterećenjem

Proračun za kružnu, slobodno oslonjenu ploču, opterećenu prema sl. 23, razlaže se na dva rešenja.

Za srednji opterećeni deo rešenje će imati dve nepozna-

te konstante C_1 i C_2 :

$$W = \frac{Z_0 a^4}{64K} \rho^4 + C_1 + C_2 \rho^2$$

Za spoljni, neopterećeni deo opšte rešenje će imati četiri nepoznate konstante C_1' , C_2' , C_3' , C_4' :

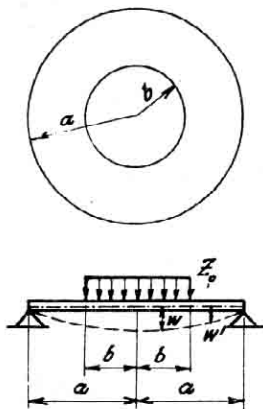
$$W' = C_1' + C_2' \rho^2 + C_3' \rho^2 \lg \rho + C_4' \lg \rho$$

Za ukupno šest nepoznatih konstanti postavimo šest uslovnih jednačina :

$$W = 0 ; M_r = 0 \quad \text{za } \rho = 1$$

$$W = W' ; \frac{dW}{dr} = \frac{dW'}{dr} ; M_r = M_r' ;$$

$$T_r = T_r' \quad \text{za } \rho = \frac{b}{a} = \beta$$



Sl. 23.

Uslov jednakosti momenata savijanja za $\rho = \frac{b}{a} = \beta$ može, obzirom na izraz (I.72a) i jednakost nagiba tangenti, da se svede na :

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = \frac{d^2 W'}{dr^2} \quad \text{za } \rho = \beta$$

Isto tako, uslov jednakosti transverzalnih sila, obzirom na izraz (I.72c) i jednakost prvog i drugog izvoda, može da se svede na :

$$\frac{d^3 W}{dr^3} = \frac{d^3 W'}{dr^3} \quad \text{za } \rho = \beta$$

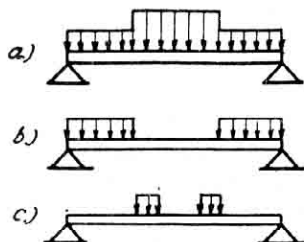
Iz dobijenih uslovnih jednačina mogu da se odrede konstante, a time i rešenje kružne ploče za ovaj slučaj opterećenja :

$$W = \frac{Z_0 a^4 \beta^2}{16K} \left\{ \frac{\rho^4}{4\beta^2} + \rho^2 \left[\frac{(1-\nu)\beta - 4}{2(1+\nu)} + 2 \lg \beta \right] + \frac{4(3+\nu) - (7+3\nu)\beta^2}{4(1+\nu)} + \beta^2 \lg \beta \right\} \quad \text{za } 0 \leq \rho \leq \beta$$

$$W' = \frac{Z_0 a^4 \beta^2}{16K} \left\{ \frac{2(3+\nu) - (1-\nu)\beta^2}{2(1+\nu)} (1-\rho^2) + 2\rho^2 \lg \rho + \beta^2 \lg \beta \right\} \quad \text{za } \beta \leq \rho \leq 1 \quad (\text{I.87})$$

Sile u preseku su :

$$\begin{aligned}
 - M_r &= \frac{Z_0 a^2 \beta^2}{4} \left[-(1+\nu) (g\beta + 1) - \frac{1-\nu}{4} \beta^2 - \frac{3+\nu}{4\beta^2} \rho^2 \right] \\
 - M_\varphi &= \frac{Z_0 a^2 \beta^2}{4} \left[-(1+\nu) (g\beta + 1) - \frac{1-\nu}{4} \beta^2 - \frac{3\nu+1}{4\beta^2} \rho^2 \right] \\
 - T_r &= -\frac{1}{2} Z_0 a \rho \quad \text{za } 0 \leq \rho < \beta \\
 - M_r' &= \frac{Z_0 a^2 \beta^2}{4} \left[-(1+\nu) (g\rho + \frac{1-\nu}{4} \beta^2 (\frac{1}{\rho^2} - 1)) \right] \\
 - M_\varphi' &= \frac{Z_0 a^2 \beta^2}{4} \left[-(1+\nu) (g\rho + (1-\nu) - \frac{1-\nu}{4} \beta^2 (\frac{1}{\rho^2} + 1)) \right] \\
 T_r' &= -\frac{1}{2} Z_0 a \beta^2 \frac{1}{\rho} \quad \text{za } \beta \leq \rho \leq 1
 \end{aligned} \tag{I.88}$$



Pomoću izvedenog rešenja za delimično opterećenje i rešenja za puno opterećenje ploče, mogu superpozicijom da se dobiju i rešenja za slučajeve opterećenja prikazane na slici 24.

Sl. 24.

5.2.7. Slobodno oslonjena ploča opterećena koncentrisanom silom u centru

Iz izvedenog rešenja (I.87) za delimično opterećenje može da se izvede rešenje za kružnu ploču opterećenu koncentrisanom silom u sredini. U tu svrhu označimo :

$$P = Z_0 a^2 \beta^2 \pi \quad \text{odn.} \quad Z_0 a^2 \beta^2 = \frac{P}{\pi}$$

Unesimo ovu vrednost u izraz za w' u (I.87) i pustimo da u ostalom delu izraza β teži nuli. Tada ćemo dobiti traženo rešenje :

$$w = \frac{P a^2}{16 \pi K} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (1-\rho^2) + 2\rho^2 (g\rho) \right] \tag{I.89}$$

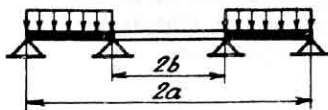
Iz ovoga rešenja sledi :

$$\begin{aligned}
 W_{max} &= \frac{3+\nu}{16(1+\nu)} \frac{Pa^2}{K\pi} \\
 M_r &= -\frac{P(1+\nu)}{4\pi} \lg p \\
 M_\varphi &= \frac{P}{4\pi} [(1-\nu) - (1+\nu) \lg p] \\
 T_r &= -\frac{P}{2\pi a p}
 \end{aligned} \tag{I.90}$$

6.2.8. Ploča u obliku kružnog prstena

Ploče u obliku kružnog prstena mogu da budu na različite načine oslonjene. Ovde ćemo prikazati samo neke slučajeve oslanjanja kružno prstenastih ploča i puteve njihovog rešavanja.

1. Ploča prikazana na sl.25 je duž ivica $r=a$ i $r=b$



Sl. 25.

slobodno oslonjena. Za rešenje ploče u ovom slučaju moramo da upotrebimo rešenje sa četiri konstante. Za njihovo određivanje stoje nam na raspoloženju na svakoj ivici po dva uslova :

$$\begin{aligned}
 w=0 \quad M_r=0 \quad \text{za } \rho = \frac{b}{a} = \beta \\
 w=0 \quad M_r=0 \quad \text{za } \rho = 1
 \end{aligned}$$

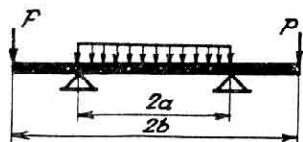
Slično bi bilo i za slučaj da su oslonjene ivice i u-
klještene :

$$\begin{aligned}
 w=0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{za } \rho = \beta \\
 w=0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{za } \rho = 1
 \end{aligned}$$

2. Kružna ploča prikazana na sl.26 tako oslonjena da jednim delom leži na prepustu.

I u ovom slučaju, slično kao u 6.2.6. proračun se razlaže na dva rešenja: rešenje I za kružnu ploču prečnika $2a$ sa dve integracione konstante i rešenje II za kružni prsten

širine $b-a$ sa četiri integracione konstante. Ovih šest integracionih konstanti dobićemo rešavanjem sledećih jednačina:



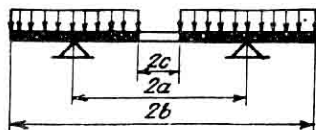
Sl. 26.

$$M_r^x = 0 ; T_r^x = P \quad \text{za } r = b$$

$$W^I = 0 ; W^II = 0 ; \frac{dw^I}{dr} = \frac{dw^II}{dr} ;$$

$$M_r^I = M_r^II \quad \text{za } r = a$$

3. Slično će važiti i za prstenastu ploču prikazanu na slici 27. Ali u ovom slučaju rešenje i za prstenasti deo širine $a - c$ za prstenasti deo širine $b - a$ imaće po četiri integracione konstante, pa će shodno tome biti osam graničnih uslova.



Sl. 27.

Dva nova uslova ćemo dobiti na ivici $r = c$, gde momenat i transverzalna sila moraju da budu ravni nuli.

U prilogu su data rešenja za neke slučajeve opterećenja kružnih i prstenastih ploča.

6.3. Kružna ploča pri proizvoljnom opterećenju

Kao što je ranije izvedeno, diferencijalna jednačina ploče u polarnim koordinatama je :

$$\Delta \Delta W = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \varphi^2} \right) = \frac{Z}{K}$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine za slučaj proizvoljnog opterećenja prikazaćemo u obliku :

$$W = W_0 + W_1 \quad (\text{I.91})$$

gde je W_0 partikularni integral nehomogene diferencijalne jednačine $\Delta \Delta W = \frac{Z}{K}$, a W_1 jedno rešenje homogene diferencijalne jednačine $\Delta \Delta W = 0$. Rešenje ove druge jednačine potražićemo u obliku reda :

$$W_1 = W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_m \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_m \sin m\varphi \quad (\text{I.92})$$

gde su W_0 , W_m i \bar{W}_m funkcije samo od promenljive r . Unesemo li ovo rešenje u diferencijalnu jednačinu, za svaku od ovih funkcija ćemo dobiti običnu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$\left(\frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 W_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_m}{dr} - \frac{m^2 W_m}{r^2}\right) = 0 \quad (I.93)$$

Ovu jednačinu možemo lako da rešimo uvodjenjem smene $r = e^t$. Opšte rešenje jednačine za $m > 1$ glasi :

$$W_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \quad (I.94)$$

Za $m=0$ dobijamo već poznato rešenje za rotaciono simetrično savijanje ploče :

$$W_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \lg r + D_0 r^2 \lg r \quad (I.95)$$

Rešenjem karakteristične jednačine za $m=1$ javio bi se jedan par istih korena. Zbog toga je rešenje :

$$W_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 \frac{1}{r} + D_1 r \lg r \quad (I.96)$$

Slični izrazi mogu da se ispišu i za funkciju \bar{W}_m . Pošto ove izraze zamenimo u (I.92) dobićemo opšte rešenje diferencijalne jednačine. Pri tome, zadato opterećenje treba predstaviti u obliku jednostrukog trigonometrijskog reda po promenljivoj φ , da bi mogli slično kao i kod M. Levy-evog rešenja za pravougaonu ploču, koristeći granične uslove, da odredimo integracione konstante.

6.3.1. Kružna ploča opterećena linearno promenljivim opterećenjem

Opterećenje ploče prikazano na sl. 28 možemo da podelimo na jedno rotaciono simetrično opterećenje veličine :

$$Z_0 = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2)$$

i na jedno antimetrično opterećenje veličine :

$$Z_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \cos \varphi \quad (I.97)$$

Ovde ćemo dati rešenje za ovo drugo opterećenje.
Partikularno rešenje diferencijalne jednačine možemo

lako da odredimo. Ako unese-
mo u nehomogenu diferencijal-
nu jednačinu rešenje oblika:

$$w_0 = A_0 \frac{\rho r^5}{a} \cos \varphi$$

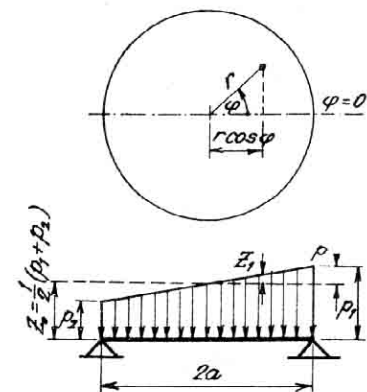
dobićemo za konstantu A_0
vrednost :

$$A_0 = \frac{1}{192K}$$

Uvodeći $\rho = \frac{r}{a}$, dobijamo:

$$w_0 = \frac{\rho a^4}{192K} \rho^5 \cos \varphi \quad (\text{I.98})$$

Obzirom da je optereće-
nje dato samo prvim članom
trigonometrijskog reda po ko-
sinusima, to će rešenje homo-



Sl. 28.

gene diferencijalne jednačine prema (I.98) biti :

$$w_1 = (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 \frac{1}{r} + D_1 r \lg r) \cos \varphi$$

Ukupno rešenje je tada :

$$w = w_0 + w_1 = \frac{\rho a^4}{192K} (\rho^5 + A\rho + B\rho^3 + C\frac{1}{\rho} + D\rho \lg \rho) \cos \varphi \quad (\text{I.99})$$

Kružna ploča u svom centru ($\rho=0$), mora da ima ugib i moment M_r konačnih vrednosti. Taj uslov traži da konstante C i D budu jednake nuli. Konstante A i B ćemo odrediti iz uslova oslanjanja na kraju $\rho=1$.

Za slučaj slobodno oslonjene ploče uslovi su :

$$(w)_{\rho=1} = \frac{\rho a^4}{192K} (1 + A + B) \cos \varphi = 0$$

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{\rho a^2}{192} [4(5+\nu) + B \cdot 2(3+\nu)] \cos \varphi = 0$$

Rešenjem ovih jednačina dobijamo konstante a time i de-
finitivno rešenje i sile u preseku :

$$w = \frac{\rho a^4}{192(3+\nu)K} \rho(1-\rho^2)[7+\nu-(3+\nu)\rho^2] \cos \varphi$$

$$M_r = \frac{\rho a^2}{48} (5+\nu) \rho (1-\rho^2) \cos \varphi$$

$$M_\varphi = \frac{\rho a^2}{48(3+\nu)} \rho [(5+\nu)(1+3\nu) - (1+5\nu)(3+\nu)\rho^2] \cos \varphi$$

$$T_r = \frac{\rho a}{24(3+\nu)} [2(5+\nu) - 9(3+\nu)\rho^2] \cos \varphi$$

(I.100)

$$T_\varphi = -\frac{\rho a}{24(3+\nu)} \rho [2(5+\nu) - 3(3+\nu)\rho^2] \sin \varphi$$

Maksimalni momenat M_r dobijamo za $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

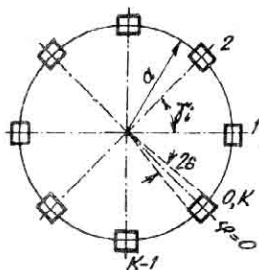
$$(M_r)_{max} = \frac{\rho a^2 (5+\nu)}{72\sqrt{3}}$$

Maksimalni momenat M_φ dobijamo za $\rho = \sqrt{\frac{(5+\nu)(1+3\nu)}{3(1+5\nu)(3+\nu)}}$:

$$(M_\varphi)_{max} = \frac{\rho a^2}{72} \frac{(5+\nu)(1+3\nu)}{3+\nu}$$

6.3.2. Kružna ploča oslonjena na stubove opterećena ravnomoerno podeljenim opterećenjem

Ploča prikazana na slici 29 oslonjena je u tačkama

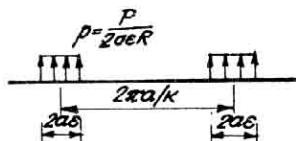


Sl. 29.

1, 2, ... k, na međusobno jednakom rastojanju. Rezultanta reakcije na jednom osloncu je $\frac{P}{K}$, gde je P rezultanta ukupnog opterećenja $P = \sum_0 \pi a^2$ a K broj oslonaca. Na sl. 30 su prikazane ove reakcije na razvijenoj projekciji obima ploče, pod pretpostavkom da se na širini stuba rasprostiru kao jednako podeljeno opterećenje. Ovakvo opterećenje možemo da razvijemo u Fourier-ov red sa periodom $\frac{2\pi a}{K}$ pa dobijamo

$$\bar{p}(\varphi) = \frac{P}{a\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{\sin n\kappa\epsilon}{n\kappa\epsilon} \cos n\kappa\varphi \right) \quad (\text{I.101})$$

Rešenje problema pretpostavljamo u obliku zbira :



$$W = W' + W'' \quad (\text{I.102})$$

Sa W' ćemo označiti rešenje za slobodno oslonjenu ploču (I.79) a sa W'' partikularni integral homogene diferencijalne jednačine u obliku :

Sl. 30.

$$W'' = A_0 + \sum_m (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \cos m\varphi \quad (\text{I.103})$$

gde je $m = k\pi$, a $n = 1, 2, 3, \dots$

Konstante A_m i B_m određujemo iz uslova da je momenat savijanja M_r na konturi jednak nuli i da je reaktivno opterećenje po konturi jednako opterećenju $\bar{p}(\varphi)$

$$(M_r''')_{r=a} = 0 \quad (\bar{T}_r'')_{r=a} + \frac{P}{2\pi a} - \bar{p}(\varphi)$$

Konstantu A_0 koja je bez značaja za naprezanje određujemo iz uslova da je W'' u sredini jednog od oslonaca ravan nuli. Samim tim će biti ugib i nad ostalim osloncima jednak nuli.

7. PRORAČUN PLOČA METODOM KONAČNIH RAZLIKA

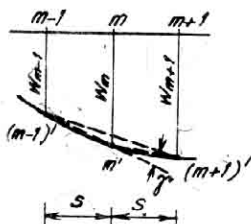
(DIFERENCNA METODA)

7.1. Rešavanje običnih linearnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih razlika

Sušтина diferencne metode ili metode konačnih razlika se sastoji u izražavanju bilo kog izvoda funkcije $f(x)$ u uočenoj tački, putem ordinata te funkcije u obližnjim i unapred određenim tačkama datog intervala.

Smatraćemo da je funkcija $f(x)$ u intervalu $A-B$ neprekidna i da su njeni izvodi takodje neprekidni do onog reda koji će nam biti potreban. Dati interval $A-B$ ćemo podeliti na

M jednakih delova. Posmatraćemo deo krive $W = W(x)$ između tačaka $m-1$, m i $m+1$ (sl. 31).



Sl. 31.

Ako pretpostavimo da se funkcija $W = f(x)$ u intervalu $(m-1) \div (m+1)$ može da aproksimira interpolacionom parabolom drugog reda, koja prolazi kroz tačke $(m-1)'$, m' , $(m+1)'$, onda prvi izvod u tački m izražen putem ordinata W_{m-1} i W_{m+1} glasi :

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_m \approx \frac{W_{m+1} - W_{m-1}}{2S} \quad (\text{I.104})$$

Drugim rečima, tangens pravca sečice kod kvadratne parabole, kao što je poznato, ravan je tangensu tangente na krivu u tački m' .

Drugi izvod možemo da shvatimo kao promenu prvog izvoda po jedinici dužine. Na delu $(m-1), (m)$ vrednost prvog izvoda je $\frac{1}{S}(W_m - W_{m-1})$, a na delu $(m), (m+1)$ je $\frac{1}{S}(W_{m+1} - W_m)$. Formirajmo sada razliku ovih vrednosti i podelimo je sa dužinom S . Tada dobijamo :

$$\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_m \approx \frac{W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}}{S^2} \quad (\text{I.105})$$

Razumljivo je da bi smo istu vrednost dobili i da smo interpolacionu kvadratnu parabolu određenu putem ordinata W_{m-1} , W_m , W_{m+1} dva puta diferencirali. Pod pretpostavkom da su ordinate W male u odnosu na dužinu intervala AB , vrednost $\gamma_m = (W_{m-1} - 2W_m + W_{m+1})/S^2$ predstavlja veličinu prelomnog ugla, odnosno kontigentni ugao u čvoru m , poligona dobijenog iz date krive linije spajanjem tačaka m' ($m' = 1', 2' \dots M'$) pravim linijama.

Treći izvod funkcije W možemo da dobijemo ako ga shvatimo kao prvi izvod drugog izvoda, koga ćemo za trenutak obeležiti sa r . Znači:

$$\left(\frac{d^3W}{dx^3}\right)_m \approx \frac{r_{m+1} - r_{m-1}}{2S}$$

Ako za r_{m+1} i r_{m-1} unesemo odgovarajuće vrednosti drugog izvoda u tačkama $m+1$ i $m-1$ putem ordinata funkcije W , prema (I.105), dobijamo :

$$\left(\frac{d^3 W}{dx^3}\right)_m \approx \frac{W_{m+2} - 2W_{m+1} + 2W_{m-1} - W_{m-2}}{2s^3} \quad (\text{I.106})$$

Četvrti izvod ćemo napisati kao drugi izvod drugog izvoda funkcije W :

$$\left(\frac{d^4 W}{dx^4}\right)_m \approx \frac{r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}}{s^2}$$

ili preko ordinata funkcije W :

$$\left(\frac{d^4 W}{dx^4}\right)_m \approx \frac{W_{m+2} - 4W_{m+1} + 6W_m - 4W_{m-1} + W_{m-2}}{s^4} \quad (\text{I.107})$$

Na sličan način bi smo mogli da izrazimo i više izvode putem ordinata funkcije W .

Predjemo li sada na običnu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim ili promenljivim koeficijentima :

$$F(W, W', W'', \dots, W^{(n)}, x) = 0$$

gde su sa crtom obeleženi izvodi po x , možemo za svaku tačku intervala AB da napišemo jednačinu :

$$F(W_m, W_m', W_m'', \dots, W_m^{(n)}, x_m) = 0$$

Izrazimo li odgovarajuće izvode putem ordinata funkcije W kako smo to pokazali, dobićemo u svakoj unapred određenoj tački m intervala AB jednu linearnu jednačinu. Broj linearnih jednačina po nepoznatim W_m biće jednak broju izabranih tačaka unutar intervala. Osim toga stoje nam još na raspoloženju i granični uslovi koji zajedno sa svim jednačinama čine sistem jednačina iz koga se određuju nepoznate W_m .

Prilikom ispisivanja diferencijalne jednačine u diferencnom obliku za tačke na krajevima intervala, odnosno, zavisno od reda diferencijalne jednačine i za tačke u blizini krajeva, javiće se i ordinate funkcije W izvan intervala. Ove prekobrojne ordinate izvan intervala $A-B$ određuju se iz graničnih uslova ispisanih putem konačnih razlika.

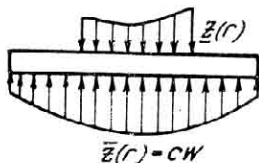
7.2. Proračun kružne ploče na elastičnoj podlozi metodom konačnih razlika

Kao primer proračuna kružne ploče metodom konačnih razlika uzećemo jedno specifično poglavlje iz oblasti savijanja ploča, kružnu ploču na elastičnoj podlozi.^{*)}

Opterećenje ploče na elastičnoj podlozi sastoji se iz dva dela - spoljnjeg, zadanog opterećenja na ploču $\underline{Z}(r)$ i reaktivnog opterećenja elastične podloge $\bar{Z}(r)$. Za reaktivni otpor tla usvaja se da je po Vinkler-ovoj pretpostavci, proporcionalan ugibu ploče

$$\bar{Z}(r) = cW \quad (\text{I.108})$$

gde je c konstanta podloge koja zavisi od elastičnih osobina podloge i koja ima dimenzije kg/cm^3 ili t/m^3 . Slobodan član diferencijalne jednačine savijanja ploče pri rotaciono simetričnom opterećenju može se prema tome napisati u obliku :



$$\underline{Z} = \underline{Z} - \bar{Z}$$

odnosno :

$$\underline{Z} = \underline{Z} - cW$$

Sl. 32.

pa diferencijalna jednačina ploče dobija sledeći oblik :

$$\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} + \frac{cW}{K} = \frac{\underline{Z}}{K}$$

Ova diferencijalna jednačina napisana preko konačnih razlika za svaku tačku m poluprečnika ploče izdvojenog na M jednakih intervala glasi :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{54} (W_{m+2} - 4W_{m+1} + 6W_m - 4W_{m-1} + W_{m-2}) + \frac{1}{53r_m} (W_{m+2} - 2W_{m+1} + \\ & + 2W_{m-1} - W_{m-2}) - \frac{1}{5^2 r_m^2} (W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}) + \\ & + \frac{1}{23 r_m^3} (W_{m+1} - W_{m-1}) + \frac{c}{K} W_m = \frac{\underline{Z}_m}{K} \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

^{*)} Egzaktno analitičko rešenje dato je preko Beselovih funkcija.

Ako veličinu $\frac{3}{r_m}$ obeležimo sa λ_m i jednačinu sredimo po padajućim indeksima uz W , dobijamo :

$$\begin{aligned} & (1+\lambda_m)W_{m+2} - \left[2(2+\lambda_m) + \frac{\lambda_m^2}{2}(2-\lambda_m)\right]W_{m+1} + \\ & + \left[6+2\lambda_m^2 + \frac{c}{K}S^4\right]W_m - \left[2(2-\lambda_m) + \frac{\lambda_m^2}{2}(2+\lambda_m)\right]W_{m-1} + \\ & + (1-\lambda_m)W_{m-2} = \frac{Z_m S^4}{K} \end{aligned} \quad (I.110)$$

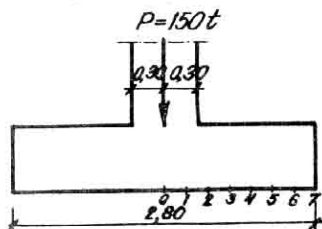
pa sile u preseku M_r , M_φ i T_r mogu na osnovu ranije izvedenih izraza da se napišu :

$$\begin{aligned} M_{r,m} &= -K \left[\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right]_m = -\frac{K}{S^2} \left[W_{m+1} \left(1 + \frac{\nu \lambda_m}{2}\right) - 2W_m + W_{m-1} \left(1 - \frac{\nu \lambda_m}{2}\right) \right] \\ M_{\varphi,m} &= -K \left[\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right]_m = -\frac{K}{S^2} \left[W_{m+1} \left(\nu + \frac{\lambda_m}{2}\right) - 2W_m \nu + W_{m-1} \left(\nu - \frac{\lambda_m}{2}\right) \right] \\ T_r &= -K \left[\frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right]_m = \\ &= -\frac{K}{2S^3} \left[W_{m+2} - W_{m+1} (2-2\lambda_m + \lambda_m^2) - 4\lambda_m W_m + \right. \\ & \quad \left. + W_{m-1} (2+2\lambda_m + \lambda_m^2) - W_{m-2} \right] \end{aligned} \quad (I.111)$$

Sistem jednačina sa zadatim graničnim uslovima koje treba prikazati putem konačnih razlika daje dovoljan broj jednačina za određivanje nepoznatih pomeranja W u izabranim tačkama ploče.

7.2.1. Brojni primer

Kao brojni primer sračunaćemo temeljnu ploču jednog stuba. U primeru je zastupljena potpuna rotaciona simetrija.



Poluprečnik ploče delimo na sedam jednakih intervala po 0,20 m.

Elastične karakteristike ploče i podloge su:

Poisson-ov broj $\nu = \frac{1}{6}$

Modul elastičnosti ploče

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \left[\frac{t}{m^2} \right]$$

Krutost ploče na savijanje $K = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = 3,888 \cdot 10^4 \text{ [tm]}$

Koeficijent podloge $c = 10 \text{ kg/cm}^3$ odnosno $10^4 \text{ [t/m}^3\text{]}$

Opterećenje p prenosi se samo na tri srednja intervala kao jednako podeljeno opterećenje intenziteta :

$$p_x = \frac{P}{r^2 x} = \frac{150}{0,30^2 x} = 530,516 \left[\frac{\text{t}}{\text{m}^2} \right]$$

Granični uslovi su za $r=a$ dati po silama, odnosno pošto je u pitanju slobodan kraj moraju biti ispunjeni sledeći uslovi :

$$\begin{aligned} \text{za } r=a : \quad M_{r,7} &= 0 \\ T_{r,7} &= 0 \end{aligned}$$

Kada ove uslove izrazimo putem konačnih razlika prema (I.111) imajući u vidu da je :

$$\lambda_m = \frac{0,20}{1,40} = 0,14286 \quad ; \quad \lambda_m^2 = 0,020408$$

dobijamo :

$$W_8 \left(1 + \frac{0,16 \cdot 0,20}{2 \cdot 1,40} \right) - 2W_7 + W_6 \left(1 - \frac{0,16 \cdot 0,20}{2 \cdot 1,40} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} W_9 - (2 - 2 \cdot 0,14286 + 0,02041)W_8 - 4 \cdot 0,14286 W_7 + \\ + (2 + 2 \cdot 0,14286 + 0,02041)W_6 - W_5 = 0 \end{aligned}$$

Ordinate W_8 i W_9 predstavljaju produženje funkcije W izvan intervala, a njihova vrednost se određuje upravo iz ovih jednačina :

$$1,01190 W_8 - 2W_7 + 0,48810 W_6 = 0$$

$$W_9 - 1,73469 W_8 - 0,57144 W_7 + 2,30613 W_6 - W_5 = 0$$

odakle sledi :

$$W_8 = 1,976480 W_7 - 0,976480 W_6$$

$$W_9 = 4W_7 - 4W_6 + W_5$$

Usled simetrije ploče i opterećenja u odnosu na sredinu, nagib tangente na elastičnu površinu je u sredini ploče jednak nuli :

$$\frac{W_1 - W_{-1}}{2S} = 0$$

odakle sledi

$$W_1 = W_{-1}$$

iz istog razloga je: $W_{-2} = W_2$

Za $r=0$ neki članovi diferencijalne jednačine postaju neodređeni, pa ne možemo direktno ispisati jednačimu (I.110) za tačku 0. Pošto ugibi i ostale statičke veličine imaju u tački $r=0$ konačne i određene vrednosti, moramo funkciju i njene izvode u okolini tačke nula prikazati pomoću Taylor-ovog reda :

$$W = W(0) + \frac{r^2}{2!} \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)_0 + \frac{r^4}{4!} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \dots$$

$$\frac{dW}{dr} = r \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)_0 + \frac{r^3}{3!} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \dots$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)_0 + \frac{r^2}{2!} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \dots$$

$$\frac{d^3 W}{dr^3} = \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 r + \dots \quad \frac{d^4 W}{dr^4} = \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \dots$$

Diferencijalna jednačina ploče ima prema tome sledeći oblik u tački $r=0$:

$$\left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + 2 \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 - \frac{1}{2!} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \frac{C}{K} W(0) = \frac{Pl}{K}$$

odnosno :

$$\frac{8}{3} \left(\frac{d^4 W}{dr^4} \right)_0 + \frac{C}{K} W(0) = \frac{Pl}{K} \quad (\text{I.112})$$

Putem konačnih razlika, imajući u vidu da je $W_1 = W_1$ i $W_2 = W_2$, ova diferencijalna jednačina može da se napiše u sledećem obliku :

$$\frac{8}{3} [W_2 - 4W_1 + 6W_0 - 4W_{-1} + W_{-2}] + \frac{C}{K} s^4 W_0 = \frac{Pl}{K} s^4$$

$$\left[16 + \frac{C}{K} s^4 \right] W_0 - \frac{64}{3} W_1 + \frac{16}{3} W_2 = \frac{Pl}{K} s^4$$

Pre nego što postavimo jednačine za tačke od 0 do 7 razdunaćemo koeficijente u jednačinama (I.110).

Koefficienti u jednačinama (I.110)

m	λ_m	$1-\lambda_m$	$1+\lambda_m$	$2-\lambda_m$	$2+\lambda_m$	λ_m^2	$[]_{m-1}$	$[]_{m+1}$	$6+2\lambda_m^2$
1	1	0	2	1	3	1	3,5	6,5	8,0
2	0,5000	0,5000	1,50000	1,50000	2,50000	0,250000	3,312500	5,187500	6,5
3	0,3333	0,6667	1,33333	1,66667	2,33333	0,111111	3,462964	4,759260	6,222222
4	0,2500	0,7500	1,25000	1,75000	2,25000	0,06250	3,570313	4,554688	6,125000
5	0,2000	0,8000	1,20000	1,80000	2,20000	0,04000	3,644000	4,436000	6,080000
6	0,1667	0,8333	1,16667	1,83333	2,16667	0,02778	3,696759	4,358797	6,055556
7	0,1429	0,8571	1,14286	1,85714	2,14286	0,02041	3,736152	4,304664	6,040820

$$\frac{c s^4}{K} = \frac{10^4 \cdot 0,2^4}{3,888 \cdot 10^4} = \frac{16}{3,888} 10^{-4} = 0,000412$$

Slobodni član diferencijalne jednačine (I.110) glasi

$$\frac{p_K s^4}{K}, \text{ gde je :}$$

$$p_K = \frac{P}{r^2 \pi} = \frac{150}{0,30^2 \pi} = 530,51655 \left[\frac{t}{m^2} \right]$$

$$\frac{p_K s^4}{K} = \frac{530,51655 \cdot 0,20^4}{3,888 \cdot 10^4} = 2,18320 \cdot 10^{-5}$$

Pošto smo sračunali koefficiente uz nepoznate, možemo ispisati sistem jednačina (I.110).

	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	$\frac{p_0^4}{K}$
0	16,000412	-21,333333	5,333333						-1
1	-3,500000	8,000412	-6,500000	2,000000					-1
2	0,500000	-3,312500	6,500412	-5,187500	1,500000				0
3		0,666667	-3,462964	6,222634	-4,759260	1,333333			0
4			0,750000	-3,570313	6,125412	-4,554688	1,250000		0
5				0,800000	-3,644000	6,080412	4,436000	1,200000	0
6					0,833333	-3,696759	4,316741	-2,052903	0
7						2,000000	-4,104162	2,104578	0

Rešenjem ovog sistema jednačina dobijamo

TAČKA	0	1	2	3	4	5	6	7
ω 10^2 m	0,2607522	0,2596410	0,2566963	0,2530534	0,2491784	0,2453118	0,2415645	0,2379557
p $\frac{1}{m^2}$	26,07522	25,96410	25,66963	25,30534	24,91784	24,53118	24,15645	23,79557

Pri čemu je: $\beta_m = c W_m$

za w_8 i w_9 dobijamo :

$$w_8 = 0,2344318 \quad i \quad w_9 = 0,2308767$$

Sile u preseku

Prema jednačinama (I.111) imamo :

$$M_{r,m} = -\frac{K}{S^2} \left[W_{m+1} \left(1 + \frac{\nu S}{2r_m} \right) - 2W_m + W_{m-1} \left(1 - \frac{\nu S}{2r_m} \right) \right]$$

gde je :

$$\frac{K}{S^2} = \frac{3,888 \cdot 10^9}{0,2^2} = 97,2 \cdot 10^4 \left[\frac{tm}{m^2} \right] \quad \frac{\nu S}{2} = \frac{0,16 \cdot 0,2}{2} = 0,016$$

m	$10^2 \omega_m$ [m]	r_m [m]	$\frac{\nu S}{2r_m}$	$1 + \frac{\nu S}{2r_m}$	$1 - \frac{\nu S}{2r_m}$	$M_{r,m}$ $\left[\frac{tm}{m} \right]$
1	0,2596410	0,20	0,083333	1,083333	0,916667	21,1068
2	0,2566963	0,40	0,041667	1,041667	0,958333	9,4547
3	0,2530534	0,60	0,027778	1,027778	0,972222	4,2860
4	0,2491784	0,80	0,020833	1,020833	0,979167	1,4858
5	0,2453118	1,00	0,016667	1,016667	0,983333	0,0741
6	0,2415645	1,20	0,013889	1,013889	0,986111	-0,3531
7	0,2379557	1,40	0,011905	1,011905	0,988095	0

Kako za tačku $r=0$ imamo prema (I.112) da je :

$$\left(\frac{dW}{dr} \right)_0 = \left(\frac{d^2W}{dr^2} \right)_0 r + \left(\frac{d^3W}{dr^3} \right)_0 r^2 + \dots$$

izraz za $M_{r,0}$ u tački $r=0$ možemo da napišemo u obliku :

$$M_{r,0} = -K \left[\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right]_0 = -K(1-\nu) \left(\frac{d^2W}{dr^2} \right)_0$$

što izraženo putem konačnih razlika dobija sledeći oblik :

$$M_{r,0} = -K(1+\nu) \frac{2}{s^2} (W_1 - W_0) - \frac{2(1+0,1666) \cdot 3,888 \cdot 10^9}{0,20^2} (0,2607522 - 0,2596410) \cdot 10^{-2} = 25,2021 \text{ tm/m}$$

Moment $M_{\varphi, m}$ izražen putem konačnih razlika, prema jednačinama (I.111) glasi :

$$M_{\varphi, m} = -\frac{K}{s^2} \left[W_{m+1} \left(\nu + \frac{s}{2r_m} \right) - 2W_m \nu + \left(\nu - \frac{s}{2r_m} \right) W_{m-1} \right]$$

m	$10^2 \omega_m$ [m]	r_m [m]	$\frac{s}{2r_m}$	$\nu + \frac{s}{2r_m}$	$\nu - \frac{s}{2r_m}$	$M_{\varphi, m}$ [tm]
1	0,2596410	0,20	0,500	0,66667	-0,33333	22,6563
2	0,2566963	0,40	0,250	0,41667	-0,08333	17,1140
3	0,2530534	0,60	0,166	0,33333	0	12,5553
4	0,2491784	0,80	0,125	0,29167	0,04167	9,3681
5	0,2453118	1,00	0,100	0,26667	0,06667	7,1841
6	0,2415645	1,20	0,083	0,25000	0,08333	5,7338
7	0,2379557	1,40	0,07143	0,23810	0,09524	4,7920

Koristeći izraz $M_{\varphi,0} = -K \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dW}{dr} \right) + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right]_0 = -K(1+\nu) \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)_0$ vidimo da je on brojno jednak momentu $M_{r,0} = 25,2021 \text{ tm/m}$.

I na kraju transverzalna sila $T_{r,m}$ izražena putem konačnih razlika jednačine (I.111) glasi :

$$T_{r,m} = -\frac{K}{2s^3} \left[W_{m+2} - W_{m+1} (2 - 2\lambda_m + \lambda_m^2) - 4\lambda_m W_m + W_{m-1} (2 + 2\lambda_m + \lambda_m^2) - W_{m-2} \right]$$

m	λ_m	$4\lambda_m$	λ_m^2	$2 - 2\lambda_m + \lambda_m^2$	$2 + 2\lambda_m + \lambda_m^2$	$T_{r,m}$ [t]
1	1,00000	4,00000	1,00000	1,00000	5,00000	46,4859
2	0,50000	2,00000	0,25000	1,25000	3,25000	61,9650
3	0,33333	1,33333	0,11111	1,44444	2,77778	33,7770
4	0,25000	1,00000	0,06250	1,56250	2,56250	20,3877
5	0,20000	0,80000	0,04000	1,64000	2,44000	11,7126
6	0,16667	0,66667	0,02778	1,69444	2,36111	5,2488
7	0,14286	0,57144	0	1,73469	2,30613	0

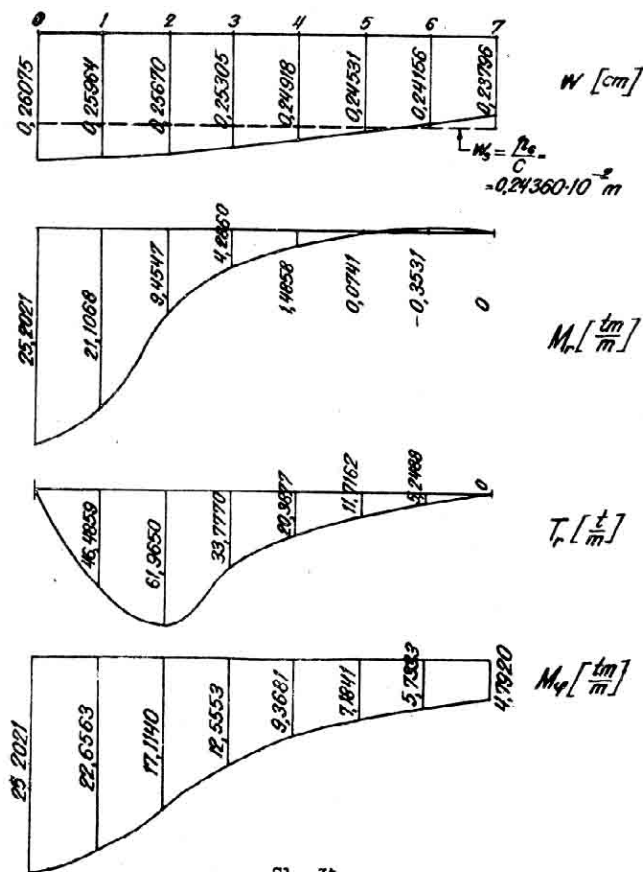
gde je :

$$\frac{K}{2s^3} = \frac{3,888 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,2^3} = \frac{3,888}{1,6} \cdot 10^6 = 2,43 \cdot 10^6$$

Zbog simetrije ploče i opterećenja transverzalna sila u tački $r=0$ jednaka je nuli:

$$T_{r,0} = 0$$

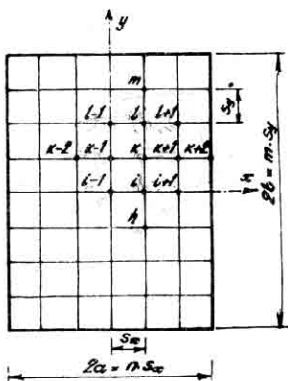
Ugibi ploče i sile u presecima prikazani su na sl. 34.



Sl. 34.

7.3. Rešavanje pravougaone ploče metodom
konačnih razlika

Na srednjoj ravni pravougaone ploče usvojićemo ortogonalnu mrežu koju sačinjavaju dva sistema ekvidistantnih pravih linija paralelnih koordinatnim osama x i y (sl. 35).



Sl. 35

Parcijalne izvode elastične površine $w(x,y)$ ćemo izraziti na sličan način kao i u slučaju funkcije jedne promenljive.

Kroz proizvoljnu tačku ortogonalne mreže povučićemo presek paralelan sa xz ravni. Tangens ugla nagiba tangente na krivu preseka u tački K , predstavljaće veličinu $(\frac{\partial w}{\partial x})_k$. Koristeći se izrazom (I.104) i sa oznakama na sl.35 biće:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2s_x}$$

i slično tome :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k \approx \frac{w_i - w_{i-1}}{2s_y}$$

Druge parcijalne izvode po x , odnosno y , možemo isto tako kao i ranije, da shvatimo kao promenu prvog izvoda po jedinici dužine. Slično izrazu (I.105) biće :

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k \approx \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{s_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k \approx \frac{w_i - 2w_k + w_{i-1}}{s_y^2}$$

Mešoviti izvod $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_k$ ćemo prikazati kao prvi izvod po y izraza $\frac{\partial w}{\partial x}$, odnosno :

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i-1}}{2s_y} \approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1} - w_{i+1} + w_{i-1}}{4s_x s_y}$$

Na sličan način možemo da izrazimo i ostale više izvode koji će nam biti kasnije potrebni :

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)_K \approx \frac{W_{K+2} - 2W_{K+1} + 2W_{K-1} - W_{K-2}}{2S_x^3}$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right)_K \approx \frac{W_{K+2} - 2W_{K+1} + 2W_{K-1} - W_{K-2}}{2S_y^3}$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)_K \approx \frac{W_{K+2} - 4W_{K+1} + 6W_K - 4W_{K-1} + W_{K-2}}{S_x^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)_K \approx \frac{W_{K+2} - 4W_{K+1} + 6W_K - 4W_{K-1} + W_{K-2}}{S_y^4}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_K &\approx \frac{1}{S_x^2} \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)_K - 2 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2}\right)_K + \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2}\right)_i \right] \approx \\ &\approx \frac{4W_K - 2(W_i + W_i + W_{K+1} + W_{K-1}) + (W_{K+1} + W_{K-1} + W_{K+1} + W_{K-1})}{S_x^2 S_y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right)_K &\approx \frac{1}{2S_x S_y} \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2}\right)_K - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2}\right)_i \right] \approx \\ &\approx \frac{W_{K+1} - 2W_K + W_{K-1} - W_{K+1} + 2W_K - W_{K-1}}{2S_x^2 S_y} \end{aligned}$$

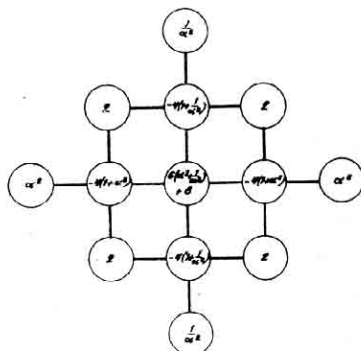
$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_K \approx \frac{W_{K+1} - 2W_{K+1} + W_{K+1} - W_{K-1} + 2W_{K-1} - W_{K-1}}{2S_x S_y^2}$$

Diferencijalnu jednačinu ploče $\Delta \Delta W = \frac{Z}{K}$ možemo da zamijenimo linearnim jednačinama sa nepoznatim vrednostima funkcije W u čvorovima mreže. Koristeći izvedene izraze za parcijalne izvode u izabranoj tački K dooijamo jednačinu :

$$\begin{aligned} W_K \left[6\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + 8 \right] - 4 \left[(1 + \alpha^2)(W_{K+1} + W_{K-1}) + \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)(W_i + W_i) \right] + \\ + 2(W_{K+1} + W_{K-1} + W_{K+1} + W_{K-1}) + \alpha^2(W_{K+2} + W_{K-2}) + \\ + \frac{1}{\alpha^2}(W_m + W_m) = \frac{Z}{K} \frac{\alpha^2 S_x^4}{K} \end{aligned} \quad (I.113)$$

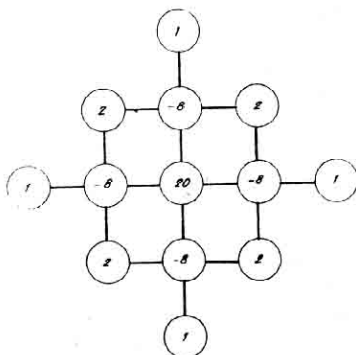
gde je: $\alpha = \frac{S_x}{S_y}$

Na sl. 36 je data pregledna šema koeficijentata koji dolaze uz nepoznate veličine ugiba W , kada se jednačina postavlja za tačku koja se nalazi u centru šeme.



Sl. 36.

možemo da razložimo, kako smo to već pokazali u izrazima (I.27) na dve harmonijske jednačine :



Sl. 37.

Ako je $s_x = s_y = s$ dobićemo :

$$20 W_K - 8(W_{K+1} + W_{K-1} + W_L + W_R) + 2(W_{L-1} + W_{L+1} + W_{R-1} + W_{R+1}) + (W_{K-2} + W_{K+2} + W_L) = -Z \frac{s^2}{K} \quad (I.114)$$

pa je šema za postavljanje jednačine data na sl. 37.

Diferencijalnu jednačinu ploče :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{Z}{K}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -Z$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{K}$$

pri čemu je $M = (M_x + M_y) / (1 + \nu)$

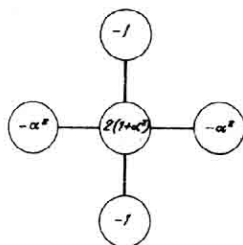
Ovo razlaganje je praktično kod slobodno oslonjene ploče obzirom na konturne uslove. Te jednačine mogu lako da se napišu u diferencnom obliku:

$$2(1 + \alpha^2) M_K - \alpha^2 (M_{K+1} + M_{K-1}) - (M_L + M_R) = Z \alpha^2 s_x^2$$

$$2(1 + \alpha^2) W_K - \alpha^2 (W_{K+1} + W_{K-1}) + (W_L + W_R) = \frac{M_K}{K} \alpha^2 s_x^2$$

(I.115)

Sema koeficijenata uz nepoznate je data na sl. 38.



Sl. 38.

Sile u preseku za čvorove mreže putem metode konačnih razlika su date sledećim izrazima :

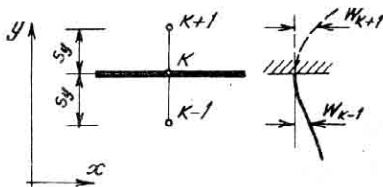
$$M_{x,K} = -K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_K = \\ = \frac{K}{S_x^2} [-W_{K+1} + 2W_K - W_{K-1} + \\ + \frac{\nu}{\alpha^2} (-W_i + 2W_K - W_i)]$$

$$M_{y,K} = -K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_K = \frac{K}{S_y^2} [-W_i + 2W_K - W_i + \\ + \nu \alpha^2 (-W_{K+1} + 2W_K - W_{K-1})] \\ M_{xy,K} = -K(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_K = \frac{K}{4S_x^2 \alpha} (1-\nu) (-W_{i+1} + W_{i-1} + W_{i+1} - W_{i-1}) \\ M_K = -K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_K = \frac{K}{S_x^2} [-W_{K+1} + 2(1+\alpha^2)W_K - W_{K-1} - W_i - W_i] \\ T_{x,K} = \frac{1}{2S_x} (M_{K+1} - M_{K-1}) = \frac{K}{2S_x^2} [W_{K+2} + (W_{i-1} + W_{i-1}) - \\ - (W_{i+1} + W_{i+1}) - W_{K+2} + 2(1+\alpha^2)(W_{K+1} - W_{K-1})] \\ T_{y,K} = \frac{1}{2S_y} (M_i - M_i) = \frac{K}{2S_x^2 \alpha} [W_h + (W_{i+1} + W_{i-1}) - (W_{i+1} + W_{i-1}) - \\ - W_m + 2(1+\alpha^2)(W_i - W_i)] \quad (I.116)$$

$$\bar{T}_{x,K} = (T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y})_K \approx \frac{1}{2S_x} [(M_{K+1} - M_{K-1}) + \frac{1}{\alpha} (M_{xy,K+1} - M_{xy,K})] = \\ = \frac{K}{2S_x^2} [W_{K+2} + (W_{K+1} - W_{K-1}) 2(\frac{2-\nu}{\alpha^2} + 1) + \\ + \frac{2-\nu}{\alpha^2} (W_{i-1} - W_{i+1} + W_{i-1} - W_{i+1}) - W_{K+2}]$$

$$\bar{T}_{y,K} = (T_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x})_K \approx \frac{1}{2S_y} [(M_i - M_i) + \alpha (M_{xy,K+1} - M_{xy,K})] = \\ = \frac{K}{2S_y^2} \{ W_h + (W_i - W_i) [2 + 2\alpha^2(2-\nu)] + \alpha^2(2-\nu) (W_{i+1} + W_{i-1} - \\ - W_{i+1} - W_{i-1}) - W_m \}$$

Prilikom ispisivanja jednačina za čvorove mreže koji se nalaze na konturi ili neposredno do konture, kao nepoznate veličine će se pojaviti i pomeranja tačaka izvan ploče. U zavisnosti od konturnih uslova zamišljamo oblik produžene elastične površine ploče izvan njenih kontura. Tako pomeranja potrebnih tačaka izvan konture dobijamo u funkciji pomeranja tačaka unutar konture ploče. U ovu svrhu uobičajene konturne uslove



Sl. 39.

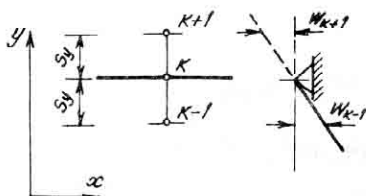
treba pretstaviti u obliku konačnih razlika. Ove uslove ćemo prikazati na ivici $y = const.$

Za uklještenu ivicu (sl.39) konturni uslovi su :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_K = \frac{W_{K+1} - W_{K-1}}{2s_y} = 0 \quad (I.117)$$

$$W_K = 0 \quad W_{K+1} = W_{K-1}$$

Za slobodno oslonjenu ivicu (sl.40) uslovi su sledeći:



Sl. 40.

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_K = \frac{W_{K+1} - 2W_K + W_{K-1}}{s_y^2} = 0$$

$$W_K = 0$$

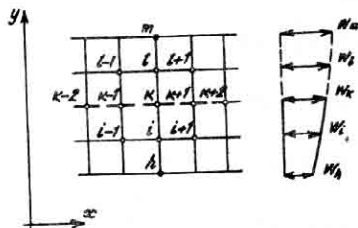
$$W_{K+1} = -W_{K-1}$$

(I.118)

Za slobodnu ivicu (sl.41) konturni uslovi su :

$$M_y = 0 \quad \text{i} \quad \bar{Y}_y = 0$$

Ovo će nam prema izvedenim izrazima (I.116) dati linearne jednačine iz kojih mogu da se odrede vrednosti svih nepoznatih izvan konture :



Sl. 41.

$$\begin{aligned}
 W_i &= 2W_K - W_i + \nu\alpha^2(-W_{K+1} + 2W_K - W_{K-1}) \\
 W_m &= W_h + [2 + 2\alpha^2(2-\nu)](W_L - W_i) + \\
 &\quad + \alpha^2(2-\nu)(W_{L+1} + W_{L-1} - W_{L+1} - W_{L-1})
 \end{aligned}
 \tag{I.119}$$

Naravno da se slični uslovi mogu da napišu i za tačke $K-2, K-1, K+1, K+2 \dots$.

Na slikama 39-41 prikazan je i način na koji su elastične površine produžene preko konture.

Reakcije oslonaca jednake su po veličini zamenjujućoj transverzalnoj sili. Ako uzmemo da se tačka K nalazi na konturi sa normalom u pravcu pozitivne x -ose i da u njoj tražimo vrednost reakcije oslonca, onda je izraz za reakciju oslonca isti kao i za zamenjujuću transverzalnu silu (I.116), samo što ispred izraza treba da stoji suprotan znak.

Uzimajući u obzir konturne uslove, za uklještenu ivicu $x = +const.$, odnosno $y = +const.$ dobijamo :

$$A_{x,K} = -\frac{K}{2S_x^3} [W_{K-2} - W_{K+2}]$$

$$A_{y,K} = -\frac{K}{2S_y^3} [W_h - W_m]$$

U ovim izrazima se javljaju i ugibi tačaka izvan ploče W_{K+2} , odnosno W_m , koje možemo da odredimo iz jednačine ploče u diferencnom obliku, postavljene za tačku K .

$$W_{K+2} = \frac{Z_K S_m^4}{K} + 8\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)W_{K-1} - \frac{4}{\alpha^2}(W_{L-1} + W_{L-1}) - W_{K-2}$$

$$W_m = \frac{Z_K S_y^4}{K} + 8(\alpha^2 + 1)W_i - 4\alpha^2(W_{L-1} + W_{L-1}) - W_h$$

Sa ovim dobijamo definitivne izraze za vertikalne reakcije uklještene konture :

$$A_{x,K} = \frac{K}{2S_x^3} \left[8\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)W_{K-1} - 2W_{K-2} - \frac{4}{\alpha^2}(W_{L-1} + W_{L-1}) + \frac{Z_K S_m^4}{K} \right]$$

$$A_{y,K} = \frac{K}{2S_y^3} \left[8(\alpha^2 + 1)W_i - 2W_h - 4\alpha^2(W_{L-1} + W_{L-1}) + \frac{Z_K S_y^4}{K} \right]$$

(I.120a,b)

Sličnim postupkom možemo da dobijemo i reakcije slobodno oslonjene konture, s tim što je :

$$W_{K+2} = -W_{K-2} + \frac{\sum_{K-2}^K s_x^2}{K}$$

$$W_n = -W_0 + \frac{\sum_{K-2}^K s_y^2}{K}$$

Sa ovim sledi :

$$A_{x,K} = \frac{K}{2s_x^2} \left[4 \left(\frac{2-\nu}{\alpha^2} + 1 \right) W_{K-1} - 2W_{K-2} - 2 \frac{2-\nu}{\alpha^2} (W_{i-1} + W_{i-1}) + \frac{\sum_{K-2}^K s_x^2}{K} \right]$$

(I.121a,b)

$$A_{y,K} = \frac{K}{2s_y^2} \left[4(1 + 2\alpha^2 - \nu\alpha^2) W_i - 2W_n - 2\alpha^2(2-\nu)(W_{i+1} + W_{i-1}) + \frac{\sum_{K-2}^K s_y^2}{K} \right]$$

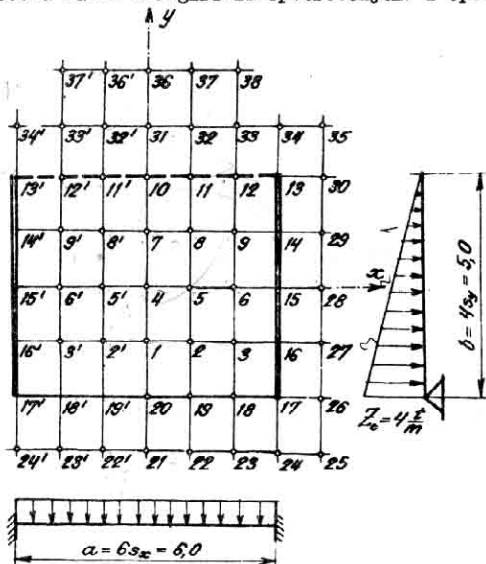
Na kraju možemo da rezimiramo put rešavanja ploče metodom konačnih razlika. Za svaku tačku izabrane ortogonalne mreže unutar kontura ploče, koristeći konturne uslove, može da se postavi linearna jednačina oblika (I.113). Dobijeni sistem jednačina je po pravilu nesimetričan u odnosu na svoju glavnu dijagonalu. Rešenjem jednačina dobijaju se vrednosti ugiba, a iz njih preko izraza (I.116) i sve sile u preseku.

Za ploču slobodno oslonjenu po konturi zgodnije je upotrebiti jednačine (I.115) jer se one brže postavljaju i znatno manji broj nepoznatih se pojavljuje u jednoj jednačini, pa shodno tome mogu i brže da se reše. U prvoj fazi rada određuju se vrednosti M , pa se sa tim vrednostima ulazi u jednačinu (I.115a) i konačno određuju ugibi.

Tačnost rezultata zavisi od gustine usvojene mreže, prirode opterećenja i graničnih uslova. Ukoliko mreža sadrži više tačaka i rezultati su tačniji. Tačnost rezultata zavisi isto tako i od uslova oslanjanja. Za istu gustinu mreže rezultati su najbliži tačnim kod slobodno oslonjene ploče, a ukoliko se pojavljuju uklještena i slobodne ivice, rezultati su sve manje tačni. Isto tako i priroda opterećenja utiče bitno na tačnost rešenja. Naglo promenljivo opterećenje zahteva mrežu sa većim brojem tačaka da bi se dobili upotrebljivi rezultati.

7.4. Primer proračuna pravougaone ploče
metodom konačnih razlika

Za primer proračuna pravougaone ploče uzeta je ploča na sl. 42 opterećena datim trouglastim opterećenjem. I optereće-



Sl. 42.

nje i geometrijski uslovi su simetrični u odnosu na y -osu, što u znatnoj mjeri smanjuje broj nepoznatih. Ploča je od betona sa konstantom $\nu = 0$

Uticaje ćemo tražiti u označenim tačkama usvojene ortogonalne mreže. Različitih tačaka na samoj ploči ima dvadeset i pomoćnih tačaka izvan konture ploče još osamnaest. Međutim, obzirom na konturne uslove broj nepoznatih se smanjuje na dvanaest, od W_1 do W_{12} . Na uklještenoj ivici $x = +\frac{\alpha}{2}$ konturni uslovi nam daju :

$$W_{13} = W_{14} = W_{15} = W_{16} = W_{17} = 0$$

$$W_{26} = 0 ; W_{27} = W_3 ; W_{28} = W_6 ; W_{29} = W_9 ; W_{30} = W_{12}$$

Na slobodno oslonjenoj ivici $y = -\frac{b}{2}$ dobijamo :

$$W_{17} = W_{18} = W_{19} = W_{20} = 0$$

$$W_{21} = -W_1; \quad W_{22} = -W_2; \quad W_{23} = -W_3; \quad W_{24} = 0$$

Pored toga u uglu ploče mora da bude :

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{17} = 0$$

što daje :

$$W_{25} = -W_3$$

Na slobodnoj ivici konturni uslovi (I.116) daju :

$$W_{31} = 2W_{10} - W_7; \quad W_{32} = 2W_{11} - W_8; \quad W_{33} = 2W_{12} - W_9$$

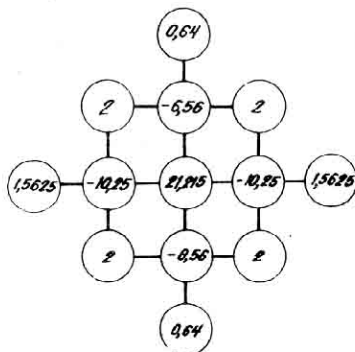
$$W_{36} = W_4 + 4(1 + 2\alpha^2)(W_{10} - W_7) + 8\alpha^2(W_8 - W_{11})$$

$$W_{37} = W_5 + 4(1 + 2\alpha^2)(W_{11} - W_8) + 4\alpha^2(W_7 + W_9 - W_{10} - W_{12})$$

$$W_{38} = W_6 + 4(1 + 2\alpha^2)(W_{12} - W_9) + 4\alpha^2(W_8 - W_{11})$$

Iz uslova $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{13} = 0$ dobijamo $W_{34} = 0$, a iz uslova $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{13} = 0$ sledi $W_{35} = W_{33}$.

Za dati odnos $\frac{S_y}{S_x} = 1,25$ šema za postavljanje jednačina je prema sl. 36 :



Za isti odnos sračunate su i vrednosti :

$$W_{36} = W_4 + 16,50(W_{10} - W_7) + 12,50(W_8 - W_{11})$$

$$W_{37} = W_5 + 16,5(W_{11} - W_8) + 6,25(W_7 + W_9 - W_{10} - W_{12})$$

$$W_{38} = W_6 + 16,5(W_{12} - W_9) + 6,25(W_8 - W_{11})$$

Prema ovoj šemi, koristeći ispisane vrednosti za tačke izvan konture ploče, dobive-

ne su sledeće jednačine za određivanje ugiba :

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	e_{12}/C
1	20,575	-20,500	3,125	-6,560	4,000	0,640							-3,00
2	-10,250	22,1375	-10,250	2,000	-6,560	2,000	0,640						-3,00
3	1,5625	-10,250	22,1375		2,000	-6,560		0,640					-3,00
4	-6,560	4,000		21,215	-20,500	3,125	-6,560	4,000		0,640			-2,00
5	2,000	-6,560	2,000	-10,250	22,7775	-10,250	2,000	-6,560	2,000		0,640		-2,00
6		2,000	-6,560	1,5625	-10,250	22,7775		2,000	-6,560			0,640	-2,00
7	0,640			-6,560	4,000		20,575	-20,500	3,125	-5,280	4,000		-2,00
8		0,640		2,000	-6,560	2,000	-10,250	22,1375	-10,250	2,000	-5,280	2,000	-1,00
9			0,640		2,000	-6,560	1,5625	-10,250	22,1375		2,000	-5,280	-1,00
10				1,280			-10,560	8,000		18,655	-20,500	3,125	0,00
11					1,280		4,000	-10,560	4,000	-10,250	20,2175	-10,250	0,00
12						1,280		4,000	-10,560	1,5625	-10,250	20,2175	0,00

Dobijene jednačine mogu da se simetrisuju ako se jednačine 1, 4, 7, 11 i 12 podele sa dva, a jednačina 10 sa četiri. Rešenjem se dobijaju sledeće vrednosti:

	\bar{M}_1	\bar{M}_2	\bar{M}_3	\bar{M}_4	\bar{M}_5	\bar{M}_6	\bar{M}_7	\bar{M}_8	\bar{M}_9	\bar{M}_{10}	\bar{M}_{11}	\bar{M}_{12}
	4,023	3,356	1,641	5,349	4,599	2,046	4,833	3,913	1,724	3,856	3,056	1,248

$\bar{M} = M/K$

Na nadjenim vrednostima ugiba, lako mogu da se odrede vrednosti momenata savijanja i torzionih momenata preko izraza (I.116), vodeći računa da je $\nu = 0$. Na primer u tački 5 te vrednosti bi bile :

$$M_{x,5} = (-5,349 + 2 \cdot 4,399 - 2,046) \frac{1}{1,0^2} = 1,403 \frac{tm}{m}$$

$$M_{y,5} = (-3,356 + 2 \cdot 4,399 - 3,913) \frac{1}{1,25^2} = 0,978 \frac{tm}{m}$$

$$M_{z,5} = (-1,724 + 4,833 + 1,641 - 4,023) \frac{1}{4 \cdot 1,0^2 \cdot 1,25} = -0,571 \frac{tm}{m}$$

Reakcije oslonaca su računane za uklještenu ivicu prema obrascu (I.120a), koji za $\alpha = 1,25$ ima oblik :

$$A_{x,k} = \frac{1}{2} [13,12 \bar{w}_{k-1} - 2 \bar{w}_{k-2} - 2,56 (\bar{w}_{i-1} + \bar{w}_{i-1}) + \bar{z}_k]$$

Za slobodno oslonjenu ivicu reakcije su računane prema (I.121b) :

$$A_{y,k} = 0,256 [16,5 \bar{w}_i - 2 \bar{w}_n - 6,25 (\bar{w}_{i+1} + \bar{w}_{i-1}) + 9,7656 \bar{z}_k]$$

Tako na primer u tačkama 15, odnosno 19, reakcije oslonaca su :

$$A_{15} = \frac{1}{2} [13,12 \cdot 2,046 - 2 \cdot 4,399 - 2,56 (1,641 + 1,724) + 2,0] = 5,715 \frac{t}{m}$$

$$A_{19} = 0,256 [16,5 \cdot 3,356 - 2 \cdot 4,399 - 6,25 (1,641 + 4,023) + 9,7656 \cdot 4] = 5,360 \frac{t}{m}$$

U sledećoj tabeli su date vrednosti momenata u pojedinim tačkama, kao i vrednosti reakcija po konturi.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
M_x	1,334	1,048	0,074	1,900	1,401	0,307	1,840	1,269	0,465	1,600	1,008	0,560	2,496	1,448	6,092	3,282	0	0	0	0
M_y	1,726	1,480	0,791	1,179	0,978	0,465	0,295	0,237	0,098	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_{xy}	0	0,660	0,880	0	0,511	0,111	0	0,139	0,268	0	0	0	0	0	0	0	0	1,342	0,992	0
A													1,936	3,660	5,715	6,290	2,000	3,024	5,360	6,015

U uglovima ploče, tj. u tačkama 13, odnosno 17, ovim rešenjem su dobijene istavne vrednosti za reakcije oslonaca. Kadjutis, prema tačnom rešenju reakcije bi morale biti ravne nuli. Ova greška nastaje usled grubosti usvojene mreže za račun.

Na sl. 43 su dati dijagrami ugiba i momenata duž koordinatnih osa, kao i statičke veličine po konturi.

Kao kontrola računa može da nam posluži uslov da zbir reakcija mora biti ravan ukupnom spoljnjim opterećenju.

Ukupno opterećenje je:

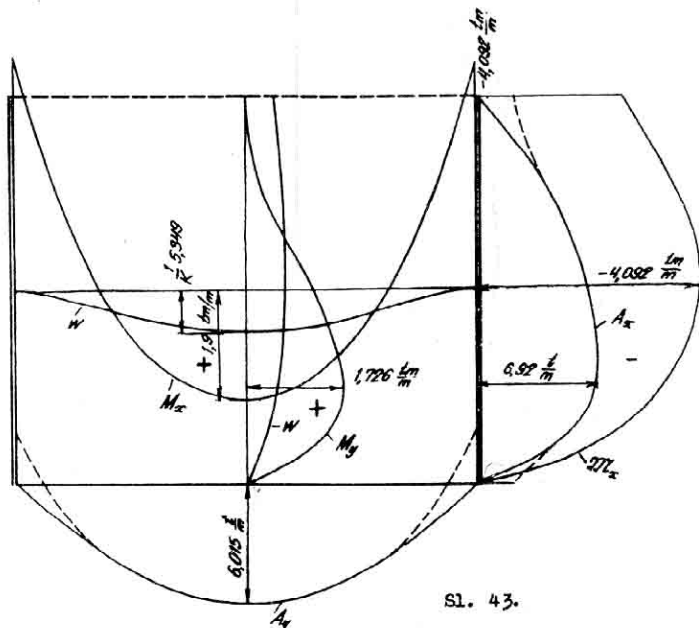
$$Z = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \times 5,0 \times 6,0 = 60,0 \text{ t.}$$

Integralni reakcije po konturi Simpsonovim pravilom, dobijamo:

$$\sum A = 65,961 \text{ t.}$$

Greška iznosi 9,93 %, što je za usvojenu gustinu mreže sasvim zadovoljavajuće.

Greška iznosi 9,93 %, što je za usvojenu gustinu mreže sasvim zadovoljavajuće.



Sl. 43.

8. UTICAJNE POVRŠINE

Čest slučaj opterećenja ploča, naročito mostovskih, je pokretno opterećenje samo na manjim delovima površine ploče. Po našim propisima saobraćajno, pokretno opterećenje je opterećenje motornim vozilima, parnim valjkom i guseničarom od 30 i 60 tona. Propisima je takodje regulisana širina i dužina naleganja točka odnosno gusenice. Treba odmah da se naglasi da površinu naleganja tereta treba redukovati na srednju ravan ploče pod pretpostavkom da se sile u betonu prenose pod uglom od 45° .

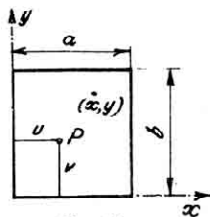
Proračun ploča napadnutih ovakvim delimičnim optereće-

njima bez upotrebe pomoćnih tabela i dijagrama, pretstavlja težak i dugotrajan posao, tim više što nije odmah moguće odrediti najnepovoljniji raspored sila po ploči, kao ni to koje vozilo daje maksimalne uticaje.

Uvodjenjem uticajnih linija u statiku grednih, linijskih sistema omogućeno je brzo i pregledno sračunavanje željenih uticaja. U novije vreme su i za ploče sračunate i publikovane tzv. uticajne površine za određivanje željenih statičkih uticaja usled pokretnih opterećenja.

Ove uticajne površine sračunate su za razne uticaje (uglavnom momente savijanja) i za pojedine karakteristične tačke pravougaonih ploča, ploča u obliku trake i kružnih ploča sa raznim konturnim uslovima. Razumljivo je da je sračunavanje ordinata ovih uticajnih površina pretstavljalo veoma dug i naporan računski posao.

Pojam uticajne površine prikazaćemo na slučaju pravougaone ploče sa slobodno oslonjenim stranama (sl.44).



Sl. 44.

U poglavlju I.3. izveli smo izraz za ugib neke tačke sa koordinatama (x, y) usled koncentrisane sile P koja deluje u tački sa koordinatama (u, v) :

$$w = \frac{4P}{Kab} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.122)$$

Ako stavimo $v=0$ dobijamo sledeći izraz za moment M_x

$$M_x = \frac{4P}{ab} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sum_m \sum_n m^2 \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (I.123)$$

Kao što smo već naglasili u i v su koordinate tačke u kojoj napada sila, dok su x i y tekuće koordinate tačke u kojoj tražimo veličinu uticaja.

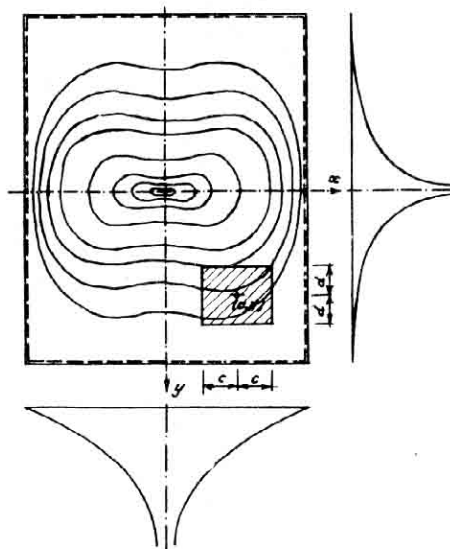
Treba medjutim primetiti da su izrazi za w i M_x , a tako isto i izrazi za M_y i M_{xy} simetrični u odnosu na parametre u i v prema tekućim koordinatama x i y . Ako x i y zamениmo sa u i v a u i v sa x i y vrednost izraza se neće promeniti.

Smatramo li parametre u i v koji određuju položaj sile kao promenljive veličine a koordinate x i y koje određuju

ju tačku u kojoj tražimo uticaj kao koordinate jedne unapred određene tačke, jednačine (I.122, 123) će predstavljati izraze za uticajne površine.

Identičnost uticajne površine za ugib tačke (x, y) i elastične površine za opterećenje silom $P = 1$ u tački (x, y) postoji shodno Maxwell-ovom stavu za proizvoljne granične uslove. Međutim, što se tiče momenata ova simetrija postoji samo za slobodno oslonjenu ploču.

Na sl. 45 prikazana je pomoću izohipsi uticajna površina za momenat savijanja M_x u sredini ploče.



Sl. 45.

U tački $(x = y = 0)$ uticajna površina, kako izlazi iz izraza (I.122) ima beskonačno veliku ordinatu. U neposrednoj blizini toga mesta uticajna površina ima oblik veoma suženog levka, koji ima konačnu zapreminu i pored beskonačne visine.

Za sračunatu i nacrtanu uticajnu površinu putem izohipsa iznalaženje uticaja za određeno površinsko opterećenje u vidu ravnomernog opterećenja na ograničenoj površini (kako se to najčešće i uzima) svodi se na množenje intenziteta datog op-

terećenja ρ' sa zapreminom ispod opterećenja do uticajne površine (sl.45) :

$$Z = \rho \int_{u-c}^{u+c} \int_{v-d}^{v+d} \eta dy dx$$

gde je sa Z obeležen traženi uticaj, a sa η ordinata uticajne površine.

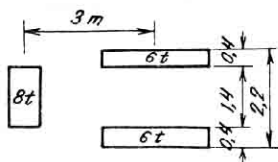
Opširne i za različite granične uslove (uklještene, slobodno oslonjene i slobodne ivice ploče) kao i za razne odnose dužina strana, sračunate i grafički predstavljene (putem izohipsi) uticajne površine dao je Pucher. Ove površine sračunate su primenom takozvane singularne metode, u čije se objašnjenje nećemo ovde upuštati, i veoma su prikladne za proračun mostovskih ploča.

Izuzev zone oko "suženog levka" za praktični proračun možemo pojedinačno, po maloj površini raspodeljeno, opterećenje zameniti rezultantom i, radi dobijanja traženog uticaja, ovu izmnožiti sa ordinatom uticajne površine ispod nje same.

Na kraju treba napomenuti da, radi skraćenja efektivnog računa, postoje tabulisane vrednosti momenata za središta ploča od ravnomernog, centričnog opterećenja raspoređenog samo u uskoj zoni oko "suženog levka". Korišćenjem ovih vrednosti otpada sračunavanje zapremine u zoni oko ovog "suženog levka". Ove vrednosti prikazane su u tabelama B.

8.1. Brojni primer

Kao brojni primer sračunavanja uticaja upotrebom Pucher-ovih uticajnih površina, odredićemo momenat M_x u sredini polja jedne kvadratne slobodno oslonjene ploče raspona $l=8m$.



Sl. 46.

je dela srednje površine ploče na koju se prenosi opterećenje od prednjeg točka su sledeće :

Opterećenje ploče je parni valjak dimenzija prema sl. 46.

Za upotrebu Pucher-ovih tabela potrebno je prvo prevesti sve dimenzije u razmeru dužine ivice ploče.

Za debljinu ploče $\delta=30cm$ i asfalt debljine 5 cm dimenzi-

u pravcu kretanja valjka $b_1 = 30 + 2 \cdot 20 = 70 \text{ cm}$

upravno na pravac kretanja $b_2 = 140 + 2 \cdot 20 = 180 \text{ cm}$

što prevedeno u razmeru dužine ploče iznosi :

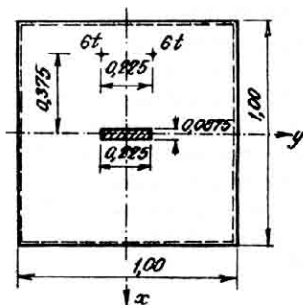
$$\beta_1 = \frac{b_1}{L} = \frac{0,70}{8} = 0,0875 \qquad \beta_2 = \frac{b_2}{L} = \frac{1,8}{8} = 0,225$$

Rastojanje između točkova valjka u razmeri dužine ivice ploče iznosi :

$$\lambda_1 = \frac{3,0}{8,0} = 0,375$$

$$\lambda_2 = \frac{1,8}{8,0} = 0,225$$

Intenzitet opterećenja od prednjeg točka iznosi :



Sl. 47.

$$p = \frac{8,0}{0,7 \cdot 1,8} = 6,35 \frac{t}{m^2}$$

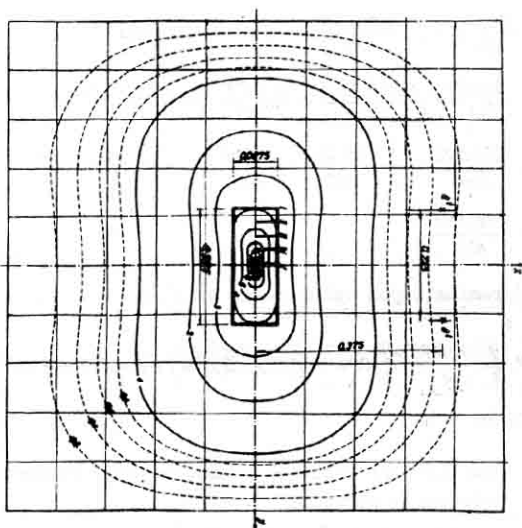
Kao što je ranije rečeno, traženi uticaj dobija se množenjem intenziteta opterećenja sa zapreminom dela uticajne površine ispod površine naleganja roga opterećenja.

Za opterećenja koja se nalaze dovoljno daleko od mesta na kome se traži uticaj (u ovom slučaju od sredine ploče)

dovoljno je tačno pomnožiti rezultantu opterećenja sa ordinatom uticajne površine na tome mestu.

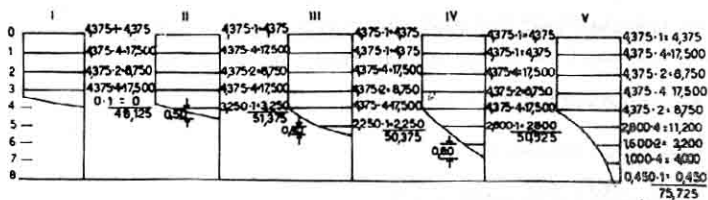
Kao jedina teškoća prema tome ostaje u ovom slučaju određivanje zapremine na delu gde uticajna površina ima singularitet.

Ovu zapreminu sračunaćemo numeričkom integracijom, određivši prvo površine nekoliko preseka čiju gustinu biramo u



Sl. 48.

zavisnosti od tačnosti koju želimo da postignemo. U našem primeru (sl.48) zapremina je podeljena sa pet preseka.



Površine poprečnih preseka prema tome iznose :

$$F_I = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{48,125}{100} = 0,160$$

$$F_{II} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{51,375}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,5 \cdot 3,25}{100} = 0,179$$

$$F_{III} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{50,375}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,4 \cdot 2,25}{100} + \frac{4,375}{100} = 0,217$$

$$F_{IV} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{50,925}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,8 \cdot 2,8}{100} + \frac{4,375}{100} = 0,239$$

$$F_V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{75,725}{100} = 0,253$$

Pa je ukupna zapremina ispod opterećenog dela ploče (prema pravilu Simpsona) :

$$8\pi \cdot V = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{0,1125}{4} [0,160 + 4(0,179 + 0,239) + 2 \cdot 0,217 + 0,253] = 0,096$$

gde su: 8π - koeficijent kojim su izmnožene sve ordinate uticajnih površina

$\frac{0,1125}{4}$ - međusobno otstojanje preseka.

Ukupan momenat od valjka iznosi prema tome :

$$M_x = \rho l^2 V + 2P\eta = 6,35 \cdot 8,0^2 \cdot \frac{0,09}{8\pi} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{0,3}{8\pi} = 1,56 + 0,14 = 1,70 \text{ tm}$$

Po tabelama ing. Dj. Zlokovića momenat od prednjeg točka iznosi (vrednost je dobijena linearnom interpolacijom) :

$$M_x' = 0,202 \cdot 8,0 = 1,61 \text{ tm}$$

Otstupanje iznosi :

$$\Delta = \frac{1,61 - 1,56}{1,61} = 0,01 = 3\%$$

Prilog A

TABELE ZA PRORAČUN PRAVOUGAONIH PLOČA OPTEREĆENIH
PODELJENIM OPTEREĆENJEM PO CELOJ PLOVIŠINI

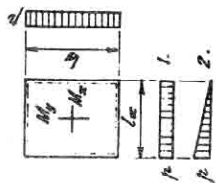
U prilogu A sredjene su u tabelama vrednosti za ugibe i momente savijanja u polju i uklještenju za slućajeve opterećenja ravnomerno podeljenim i trougaonim opterećenjem po celoj površini ploće.

U tabelama su korišćene sledeće oznake :

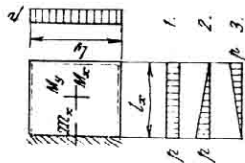
M_x, M_y	- momenti savijanja u pravcima x i y u sredini ploće
M_x^s, M_y^s	- momenti uklještenja u pravcima x i y
M_y^s	- momenat savijanja duž slobodne ivice
M_x^s	- momenat uklještenja u uglovima gde se spajaju slobodna i uklještena ivica
f_{max}	- maksimalni ugib ploće
f_c	- ugib u sredini ploće
f_s	- ugib sredine slobodne ivice
$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	- krutost ploće
E	- moduo elastičnosti
h	- debljina ploće
ν	- Poasonov moduo (u tabelama je uzeto $\nu = 0$)

Brojevi 1, 2 i 3 u prvoj koloni tabela odnose se na šemu opterećenja.

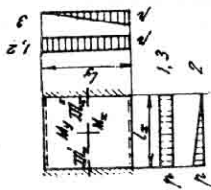
Sema	nitesaj	MULTI- PI- KATOR	l_x/l_y										
			0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,00,90	1,00,80	1,00,70	1,00,60	1,00,50
1	f_0	$10^{-3} \text{ pt} \frac{\text{cm}^2}{\text{K}}$	10,13	8,65	7,26	6,03	4,98	4,06	4,98	6,03	7,26	8,65	10,13
	M_x	$10^{-2} \text{ pt} \frac{\text{cm}^2}{\text{K}}$	9,65	8,20	6,83	5,60	4,56	3,68	3,59	3,34	2,98	2,83	2,43
	M_y	$10^{-2} \text{ pt} \frac{\text{cm}^2}{\text{K}}$	1,74	2,43	2,98	3,34	3,59	3,68	4,56	5,60	6,83	8,20	9,65
2	f_{max}	$10^{-3} \text{ pt} \frac{\text{cm}^2}{\text{K}}$	5,06	4,32	3,63	3,02	2,49	2,03	2,49	3,06	3,70	4,49	5,41
	f_0		5,06	4,32	3,63	3,02	2,49	2,03	2,49	3,06	3,63	4,32	5,06
	M_x		4,82	4,11	3,41	2,80	2,28	1,84	1,80	1,68	1,49	1,21	0,87
	M_x max	$10^{-2} \text{ pt} \frac{\text{cm}^2}{\text{K}}$	5,02	4,35	3,69	3,11	2,60	2,16	2,28	2,32	2,33	2,25	2,08
	M_y		0,87	1,21	1,49	1,68	1,80	1,84	2,28	2,80	3,41	4,11	5,02
	M_y max		1,17	1,35	1,49	1,68	1,80	1,84	2,28	2,80	3,45	4,25	5,14



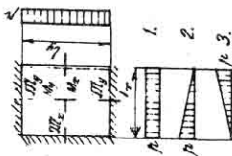
Самр	Пор	Multi- plier	l_x/l_y															
			0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,00,90	1,00,80	1,00,70	1,00,60	1,00,50					
1	r_0	$10^{-3} p l_{max}^2 / K$	4,88	4,52	4,07	3,66	3,23	2,79	3,61	4,63	5,93	7,50	9,27					
	M_x	$10^{-2} p l_{max}^2$	-12,13	-11,60	-10,67	-10,07	-9,24	-8,47	-9,26	-10,15	-11,01	-11,70	-12,18					
	M_y		5,84	5,38	4,85	4,28	3,72	3,18	3,30	3,25	3,10	2,68	2,04					
	N_x		0,60	1,04	1,51	1,88	2,21	2,43	3,32	4,24	5,54	7,07	8,81					
	r_{max}	$10^{-3} p l_{max}^2 / K$	2,20	2,03	1,85	1,67	1,48	1,28	1,68	2,17	2,79	3,57	4,46					
2	r_0		2,20	2,03	1,85	1,67	1,48	1,28	1,68	2,17	2,79	3,57	4,46					
	M_x		-6,53	-6,29	-5,97	-5,61	-5,23	-4,95	-5,49	-6,12	-6,89	-7,64	-8,40					
	M_y		2,73	2,55	2,30	2,05	1,79	1,55	1,63	1,71	1,76	1,72	1,69					
	N_x		2,73	2,55	2,30	2,05	1,79	1,55	1,63	1,69	1,59	1,38	1,09					
	r_{max}	$10^{-3} p l_{max}^2 / K$	0,51	0,67	0,85	0,93	1,01	1,11	1,48	1,97	2,59	3,38	4,23					
3	r_0		0,29	0,46	0,67	0,84	1,01	1,11	1,48	1,97	2,59	3,38	4,23					
	M_x		2,83	2,61	2,34	2,10	1,84	1,59	2,06	2,69	3,39	4,23	5,26					
	M_y		2,68	2,48	2,22	1,99	1,75	1,51	1,94	2,46	3,13	3,93	4,82					
	N_x		-5,60	-5,31	-4,90	-4,46	-4,02	-3,52	-3,78	-4,02	-4,11	-4,05	-3,77					
	r_{max}	$10^{-3} p l_{max}^2 / K$	3,84	3,54	3,17	2,81	2,48	2,15	2,28	2,37	2,38	2,31	2,12					
		M_x	3,11	2,84	2,55	2,23	1,94	1,63	1,66	1,57	1,50	1,30	0,94					
		r_{max}	0,70	0,81	0,98	1,13	1,26	1,38	1,83	2,41	3,13	4,01	5,00					
		N_y	0,31	0,58	0,84	1,03	1,19	1,32	1,74	2,27	2,95	3,69	4,58					



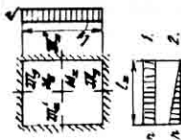
		Lx/Ly																		
1	Multiplikator $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{min}$	f_0	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,00	0,90	1,00	0,80	1,00	0,70	1,00	0,60	1,00	0,50		
		f_0	2,62	2,53	2,40	2,27	2,12	1,92	2,61	3,55	4,79	6,44	8,44	10,50	12,50	14,50	16,50	18,50	20,50	
		M_x	-8,47	-8,38	-8,16	-7,82	-7,45	-6,98	-7,99	-9,02	-10,18	-11,07	-12,13	-13,13	-14,13	-15,13	-16,13	-17,13	-18,13	-19,13
		M_y	4,13	4,01	3,80	3,50	3,19	2,86	3,06	3,16	3,16	3,19	2,92	2,74	2,74	2,74	2,74	2,74	2,74	2,74
		N_y	0,17	0,42	0,75	1,03	1,35	1,58	2,24	3,16	4,45	6,02	7,99	10,50	13,13	15,77	18,41	21,04	23,67	26,30
2	$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{min}$	f_0	1,12	1,26	1,20	1,14	1,06	0,96	1,30	1,77	2,39	3,22	4,22	5,42	6,71	8,00	9,29	10,58	11,87	
		f_0	-5,12	-5,06	-4,93	-4,72	-4,56	-4,32	-5,04	-5,75	-6,76	-7,48	-8,40	-9,32	-10,24	-11,16	-12,08	-13,00	-13,92	
		M_x	-3,36	-3,33	-3,24	-3,09	-2,90	-2,67	-2,98	-3,23	-3,42	-3,60	-3,74	-3,88	-4,02	-4,16	-4,30	-4,44	-4,58	-4,72
		M_y	2,08	2,01	1,90	1,77	1,63	1,48	1,64	1,77	1,84	1,91	1,98	2,05	2,12	2,19	2,26	2,33	2,40	2,47
		N_y	2,07	2,00	1,89	1,75	1,60	1,43	1,53	1,59	1,60	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,69	1,70
3	$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{min}$	f_0	0,09	0,21	0,38	0,52	0,67	0,79	1,12	1,58	2,22	3,01	3,39	4,22	5,05	5,88	6,71	7,54	8,37	
		f_0	1,61	1,50	1,37	1,26	1,12	0,98	1,30	1,77	2,39	3,23	4,22	5,42	6,71	8,00	9,29	10,58	11,87	
		M_x	-5,72	-5,21	-4,73	-4,38	-4,05	-3,75	-4,24	-4,75	-5,22	-5,60	-6,11	-6,62	-7,13	-7,64	-8,15	-8,66	-9,17	-9,68
		M_y	-4,24	-4,19	-4,08	-3,91	-3,72	-3,49	-3,99	-4,51	-5,09	-5,63	-6,17	-6,71	-7,25	-7,79	-8,33	-8,87	-9,41	-9,95
		N_y	0,09	0,21	0,38	0,52	0,67	0,79	1,12	1,58	2,22	3,01	3,39	4,22	5,05	5,88	6,71	7,54	8,37	9,20



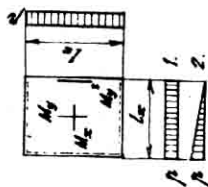
1 2 3	multiplicator	1×10^6																
		σ_0	σ_{1x}	σ_{2x}	σ_{3x}	σ_{4x}	σ_{5x}	σ_{6x}	σ_{7x}	σ_{8x}	σ_{9x}	σ_{10x}	σ_{11x}	σ_{12x}	σ_{13x}	σ_{14x}		
1	$10^{-3} / \mu\text{min}$	4,50	3,84	3,17	2,58	2,04	1,57	1,83	2,05	2,24	2,42	2,60	2,78	2,96	3,14	3,32	3,50	
	$10^{-2} / \mu\text{min}$	-11,26	-10,18	-8,87	-7,58	-6,44	-5,45	-5,54	-5,64	-5,65	-5,62	-5,59	-5,57	-5,55	-5,53	-5,51	-5,49	
	$10^{-1} / \mu\text{min}$	-7,80	-7,70	-7,45	-7,04	-6,54	-5,97	-6,60	-7,17	-7,71	-8,11	-8,35	-8,53	-8,68	-8,81	-8,91	-9,00	
	K_x	5,35	4,52	3,69	2,90	2,23	1,66	1,51	1,25	0,91	0,59	0,27	0,00	-0,27	-0,54	-0,81	-1,08	
	K_y	0,98	1,53	1,97	2,25	2,30	2,28	2,67	3,11	3,50	3,84	4,07	4,24	4,38	4,48	4,54	4,58	
2	$10^{-3} / \mu\text{min}$	2,03	1,73	1,45	1,19	0,95	0,74	0,87	0,99	1,10	1,23	1,37	1,50	1,63	1,76	1,89	2,02	
	$10^{-2} / \mu\text{min}$	-6,14	-5,65	-5,05	-4,45	-3,89	-3,40	-3,62	-3,84	-4,06	-4,26	-4,42	-4,55	-4,64	-4,70	-4,74	-4,76	
	$10^{-1} / \mu\text{min}$	-3,62	-3,58	-3,47	-3,28	-3,06	-2,85	-3,24	-3,66	-4,13	-4,59	-4,98	-5,32	-5,61	-5,84	-6,02	-6,17	
	K_x	2,51	2,17	1,79	1,42	1,17	0,95	0,96	0,94	0,94	0,93	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92
	K_y	2,51	2,17	1,79	1,42	1,12	0,86	0,79	0,73	0,73	0,53	0,34	0,17	0,00	-0,17	-0,34	-0,53	
3	$10^{-3} / \mu\text{min}$	2,63	2,21	1,82	1,48	1,17	0,90	1,07	1,22	1,33	1,41	1,48	1,54	1,60	1,66	1,71	1,76	
	$10^{-2} / \mu\text{min}$	-5,12	-4,53	-3,82	-3,13	-2,55	-2,05	-2,92	-3,42	-3,92	-4,32	-4,62	-4,88	-5,11	-5,31	-5,48	-5,62	
	$10^{-1} / \mu\text{min}$	-4,64	-4,58	-4,47	-4,19	-3,85	-3,61	-3,92	-4,32	-4,82	-5,32	-5,91	-6,41	-6,91	-7,41	-7,91	-8,41	
	K_x	3,52	3,00	2,52	2,08	1,69	1,36	1,37	1,30	1,22	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
	K_y	2,84	2,35	1,90	1,48	1,11	0,83	0,70	0,55	0,39	0,24	0,10	0,00	-0,10	-0,24	-0,39	-0,55	
K_{max}	0,65	0,87	1,10	1,26	1,30	1,29	1,53	1,79	2,05	2,29	2,48	2,63	2,78	2,92	3,05	3,17	3,28	
$K_{y_{max}}$	0,54	0,85	1,08	1,22	1,23	1,23	1,41	1,64	1,87	2,05	2,19	2,30	2,39	2,46	2,51	2,55	2,58	



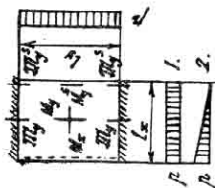
№ п/п	Имя	multiplikator	$10^{-4}g$																	
			0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,09,0,90	1,09,0,80	1,09,0,70	1,09,0,60	1,09,0,50							
1		$10^{-3} \frac{p}{K} \mu l/min$	τ_0	2,51	2,34	2,08	1,82	1,54	1,28	1,54	1,82	2,08	2,34	2,51						
			M_x	-6,18	-7,82	-7,23	-6,52	-5,80	-5,06	-5,32	-5,51	-5,61	-5,62	-5,62	-5,59					
			M_y	-5,59	-5,62	-5,61	-5,51	-5,32	-5,06	-5,80	-5,60	-6,52	-7,23	-7,82	-8,18					
			M_z	3,99	3,66	3,21	2,71	2,22	1,76	1,65	1,44	1,16	1,16	0,76	0,38					
			M_0	0,38	0,76	1,16	1,44	1,65	1,76	2,22	2,71	3,21	3,21	3,66	3,99					
2		$10^{-3} \frac{p}{K} \mu l/min$	τ_0	1,25	1,17	1,04	0,91	0,77	0,64	0,77	0,91	1,04	1,17	1,25						
			M_x	1,25	1,17	1,04	0,91	0,77	0,64	0,77	0,91	1,04	1,17	1,25						
			M_y	-4,94	-4,74	-4,44	-4,08	-3,70	-3,30	-3,59	-3,83	-4,06	-4,28	-4,48						
			M_z	-3,23	-3,08	-2,78	-2,45	-2,11	-1,76	-1,74	-1,69	-1,55	-1,35	-1,10						
			M_0	-2,94	-2,97	-2,98	-2,91	-2,86	-2,70	-3,13	-3,59	-4,14	-4,61	-5,00						
3		$10^{-3} \frac{p}{K} \mu l/min$	τ_0	-2,80	-2,81	-2,80	-2,75	-2,66	-2,53	-2,90	-3,26	-3,62	-3,91	-4,09						
			M_x	2,00	1,83	1,61	1,42	1,22	1,01	1,04	1,01	0,93	0,92	0,92						
			M_y	2,00	1,83	1,61	1,36	1,11	0,88	0,83	0,72	0,58	0,38	0,19						
			M_z	0,50	0,52	0,58	0,72	0,83	0,88	1,11	1,36	1,64	1,96	2,23						
			M_0	0,19	0,38	0,58	0,72	0,83	0,88	1,11	1,36	1,61	1,83	2,00						

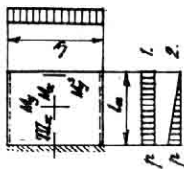


grupa	typ	multiplikator	l_e/y												
			0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,50	2,00		
1	f_0	$10^{-2} \frac{R}{K} \rho l^3 y$	1,49	2,45	3,48	4,49	5,43	6,20	7,11	7,79	8,92	10,16	11,35		
	f_B		2,85	4,51	6,15	7,67	8,92	9,68	10,84	11,58	12,49	13,16	13,69		
	M_x		0,82	1,26	1,61	1,84	1,98	2,07	2,02	1,95	1,79	1,42	0,88		
	M_y	$10^{-2} \rho l^3 y$	1,31	2,20	3,17	4,13	5,05	5,80	6,69	7,35	8,56	9,71	11,01		
	M_y^B		2,56	4,15	5,75	7,24	8,48	9,22	10,37	11,08	12,01	12,64	13,16		
2	f_0	$10^{-2} \frac{R}{K} \rho l^3 y$	0,51	0,89	1,27	1,65	2,04	2,42	2,84	3,11	3,73	4,46	5,34		
	f_B		0,85	1,49	2,02	2,45	2,83	3,07	3,23	3,36	3,43	3,22	2,81		
	M_x		0,45	0,71	0,94	1,11	1,23	1,31	1,34	1,33	1,26	1,06	0,70		
	M_y	$10^{-2} \rho l^3 y$	0,45	0,78	1,12	1,49	1,87	2,25	2,58	2,90	3,51	4,24	5,10		
	M_y^B		0,86	1,38	1,90	2,34	2,71	2,97	3,13	3,27	3,34	3,14	2,75		



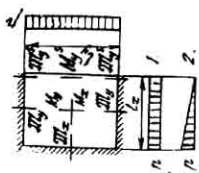
№	№	multi- plikator	l_x/l_y											
			0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,50	2,00	
1	r_0	$10^{-3} p l_y^2$	0,93	1,22	1,47	1,67	1,85	2,02	2,16	2,27	2,45	2,56	2,59	
	r_B		1,60	2,12	2,43	2,56	2,64	2,70	2,74	2,77	2,81	2,84	2,86	
	M_y	$10^{-2} p l_x^2$	-3,77	-4,72	-5,57	-6,12	-6,62	-7,07	-7,44	-7,71	-8,05	-8,28	-8,33	
	M_y^B		-6,93	-7,82	-8,46	-8,52	-8,54	-8,53	-8,50	-8,48	-8,46	-8,45	-8,45	
	M_x		0,77	0,90	0,98	1,04	1,03	0,96	0,86	0,73	0,55	0,33	0,11	
	M_y^B		1,17	1,71	2,17	2,51	2,84	3,15	3,36	3,51	3,78	4,03	4,15	
2	r_0	$10^{-3} p l_y^2$	2,30	3,07	3,61	4,03	4,26	4,38	4,42	4,45	4,47	4,49	4,50	
	r_B		0,32	0,44	0,56	0,71	0,81	0,90	0,98	1,05	1,14	1,20	1,24	
	M_y	$10^{-2} p l_x^2$	0,52	0,65	0,75	0,80	0,80	0,74	0,66	0,57	0,47	0,36	0,23	
	M_y^B		-1,38	-1,86	-2,27	-2,62	-2,94	-3,22	-3,44	-3,65	-3,93	-4,14	-4,25	
	M_x		0,44	0,67	0,77	0,79	0,78	0,76	0,70	0,63	0,50	0,31	0,09	
	M_y^B		0,38	0,59	0,79	0,98	1,15	1,31	1,45	1,58	1,80	1,98	2,08	
			0,73	0,99	1,15	1,19	1,18	1,13	1,06	0,96	0,83	0,64	0,42	





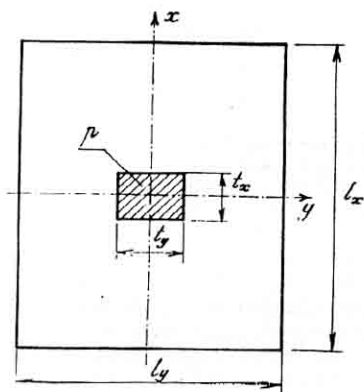
№	multiplikator	L_x/l_y												
		0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,50	2,00		
1	$f_0 \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	0,29	0,72	1,34	2,11	2,97	3,87	4,74	5,54	6,94	8,62	10,46		
	$f_B \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	0,76	1,82	3,19	4,75	6,35	7,80	9,04	10,03	11,47	12,80	13,60		
	$M_{Kx} \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	-43,08	-36,87	-30,91	-25,13	-20,66	-17,02	-14,16	-11,82	-8,45	-5,48	-3,12		
	M_x	-0,69	-0,56	-0,31	0,11	0,53	0,90	1,20	1,44	1,71	1,64	1,19		
	M_y	0,17	0,56	1,11	1,82	2,61	3,53	4,36	5,14	6,54	8,25	10,13		
	M_y^p	0,56	1,53	2,88	4,36	5,94	7,36	8,58	9,55	10,98	12,29	13,08		
2	$f_0 \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	0,09	0,21	0,42	0,69	0,98	1,32	1,66	2,00	2,70	3,57	4,72		
	$f_B \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	0,21	0,49	0,87	1,32	1,71	2,09	2,39	2,62	2,96	2,95	2,73		
	$M_{Kx} \cdot 10^{-3} / p \cdot l_y^2$	-15,04	-13,42	-11,58	-10,03	-8,64	-7,46	-6,55	-5,74	-4,51	-3,30	-2,12		
	M_x	-0,16	-0,02	0,18	0,38	0,58	0,78	0,94	1,08	1,17	1,20	0,92		
	M_y	0,05	0,15	0,32	0,57	0,87	1,20	1,50	1,81	2,48	3,36	4,49		
	M_y^p	0,15	0,41	0,77	1,22	1,62	2,00	2,29	2,51	2,88	2,88	2,67		

№ п/п	multiplikator	l_x/l_y										
		0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,50	2,00
1	ϵ_0	0,26	0,56	0,86	1,14	1,38	1,58	1,76	1,93	2,19	2,38	2,49
	ϵ_B	0,67	1,29	1,83	2,19	2,48	2,63	2,71	2,76	2,81	2,84	2,86
	M_x	-38,33	-27,83	-20,04	-14,76	-11,06	-8,65	-6,91	-5,59	-3,87	-2,48	-1,39
	M_y	-1,31	-2,42	-3,35	-4,16	-4,93	-5,61	-6,16	-6,64	-7,34	-7,93	-8,30
	M_z	-3,33	-5,45	-7,09	-7,98	-8,37	-8,48	-8,50	-8,51	-8,48	-8,46	-8,45
	M_x	-0,48	-0,14	0,15	0,44	0,62	0,76	0,87	0,84	0,77	0,52	0,25
	M_y	0,26	0,70	1,18	1,70	2,08	2,36	2,57	2,75	3,16	3,62	4,02
	M_z	-3,33	-5,45	-7,09	-7,98	-8,37	-8,48	-8,50	-8,51	-8,48	-8,46	-8,45
	ϵ_0	0,08	0,16	0,25	0,39	0,54	0,67	0,74	0,81	1,02	1,16	1,23
	ϵ_B	0,17	0,30	0,44	0,57	0,60	0,59	0,57	0,53	0,46	0,35	0,23
2	M_x	-3,69	-11,47	-9,16	-7,28	-5,65	-4,53	-3,90	-3,45	-2,60	-1,82	-1,12
	M_y	-0,48	-0,79	-1,17	-1,60	-2,02	-2,41	-2,72	-3,01	-3,47	-3,82	-4,12
	M_z	-0,83	-1,31	-1,58	-1,66	-1,64	-1,56	-1,38	-1,19	-1,00	-0,74	-0,46
	M_x	-0,09	0,01	0,15	0,33	0,49	0,64	0,73	0,73	0,66	0,44	0,20
	M_y	0,08	0,21	0,36	0,54	0,74	0,94	1,08	1,18	1,38	1,62	1,88
	M_z	0,24	0,48	0,68	0,83	0,92	0,99	0,99	0,95	0,82	0,63	0,41



Prilog BPLOČE OPTEREĆENE DELIMICNIM, CENTRIČNIM,
JEDNAKO PODELJENIM OPTEREĆENJEM

Ove tabele dobijene su kombinovanjem tabela iz knjige E. Bittner: "Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise Bewehrte Eisenbetonplatten" i iz publikacije Dj. Zlokovića: "Momenti za središte elastičnih ploča od centričnog ravnomerno podeljenog opterećenja".



Vrednosti za momente savijanja M_x i M_y u sredini pravougaone ploče sračunate su u ovim tabelama za slobodno oslonjenu ploču za sve odnose t_x/l_x dok su za ostale uslove oslanjanja sračunati samo uticaji kada je :

$$0,3l_n > t_n > 0,05l_n$$

Ove tabele se mogu koristiti uz Pucher-ve uticajne površine i samostalno. Kao i navedene uticajne površine i ove vrednosti sračunate su za Poasonov modul $\nu = 0$

Linearna interpolacija može se primeniti za nalaženje svih vrednosti u domenu $1,0 > \frac{t_n}{l_n} > 0,1$ dok je za nalaženje vrednosti unutar intervala $0,1 > \frac{t_n}{l_n} > 0,05$ preporučljiva interpolacija po kvadratnoj paraboli.

Oznake su sledeće :

- M_x, M_y - momenti savijanja u središtu ploče u pravcu x i y osa.
- l_x, l_y - dužina ivica ploče
- t_x, t_y - dimenzije dela srednje površine ploče na koju se prenosi teret pod pretpostavkom da je ugao prenošenja opterećenja kroz betonsku ploču i eventualni asfaltni zastor 45°
- $P = p_0 \frac{t_x t_y}{l_x l_y}$ - multiplikator kojim treba množiti svaku vrednost dobijenu iz tabela.

Iza ovih tabela priloženo je uputstvo za sračunavanje momenata od nekih ekscentričnih jednako podeljenih opterećenja.

Slobodno oaslonjena ploča



$$M_x = \eta_x t_x t_y$$

 M_x

$$l_x = l_y$$

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,0	0,0368	0,0407	0,0451	0,0500	0,0556	0,0620	0,0693	0,0777	0,0870	0,0978	0,1036
0,9	0,0405	0,0447	0,0495	0,0549	0,0611	0,0683	0,0764	0,0855	0,0959	0,1077	0,1142
0,8	0,0439	0,0485	0,0536	0,0595	0,0664	0,0741	0,0831	0,0933	0,1049	0,1181	0,1253
0,7	0,0471	0,0520	0,0576	0,0641	0,0715	0,0800	0,0897	0,1011	0,1141	0,1290	0,1372
0,6	0,0500	0,0554	0,0614	0,0682	0,0762	0,0854	0,0962	0,1089	0,1236	0,1407	0,1501
0,5	0,0527	0,0582	0,0646	0,0719	0,0805	0,0906	0,1025	0,1166	0,1334	0,1532	0,1644
0,4	0,0549	0,0608	0,0675	0,0753	0,0843	0,0952	0,1083	0,1241	0,1434	0,1671	0,1807
0,3	0,0567	0,0628	0,0697	0,0779	0,0875	0,0992	0,1134	0,1312	0,1536	0,1826	0,2000
0,2	0,0581	0,0643	0,0715	0,0799	0,0900	0,1023	0,1178	0,1372	0,1634	0,2001	0,2241
0,1	0,0589	0,0652	0,0729	0,0811	0,0915	0,1042	0,1203	0,1415	0,1713	0,2186	0,2556
0,05	0,0591	0,0655	0,0728	0,0814	0,0919	0,1047	0,1211	0,1427	0,1737	0,2260	0,2737

M_x $t_y = l/l_x$

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,1	0,0406	0,0449	0,0495	0,0546	0,0604	0,0677	0,0739	0,0819	0,0908	0,1007	0,1060
1,0	0,0443	0,0489	0,0540	0,0596	0,0658	0,0728	0,0806	0,0894	0,0991	0,1100	0,1158
0,9	0,0478	0,0528	0,0582	0,0643	0,0711	0,0787	0,0873	0,0969	0,1076	0,1196	0,1261
0,8	0,0511	0,0564	0,0623	0,0688	0,0762	0,0845	0,0938	0,1044	0,1163	0,1297	0,1369
0,7	0,0542	0,0599	0,0661	0,0732	0,0811	0,0901	0,1003	0,1120	0,1253	0,1403	0,1486
0,6	0,0570	0,0630	0,0697	0,0771	0,0857	0,0954	0,1066	0,1196	0,1346	0,1518	0,1613
0,5	0,0596	0,0658	0,0728	0,0808	0,0899	0,1004	0,1126	0,1272	0,1442	0,1642	0,1754
0,4	0,0617	0,0682	0,0756	0,0839	0,0936	0,1049	0,1184	0,1345	0,1544	0,1779	0,1916
0,3	0,0635	0,0702	0,0778	0,0865	0,0967	0,1088	0,1234	0,1415	0,1642	0,1932	0,2107
0,2	0,0648	0,0716	0,0794	0,0885	0,0991	0,1118	0,1275	0,1475	0,1739	0,2106	0,2347
0,1	0,0656	0,0725	0,0805	0,0896	0,1005	0,1137	0,1302	0,1517	0,1817	0,2291	0,2662
0,05	0,0658	0,0728	0,0807	0,0900	0,1009	0,1142	0,1309	0,1529	0,1841	0,2366	0,2843

 M_y

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,1	0,0326	0,0358	0,0388	0,0417	0,0442	0,0465	0,0485	0,0500	0,0511	0,0518	0,0520
1,0	0,0358	0,0393	0,0426	0,0457	0,0485	0,0510	0,0532	0,0549	0,0561	0,0569	0,0571
0,9	0,0394	0,0432	0,0469	0,0503	0,0535	0,0562	0,0586	0,0605	0,0620	0,0628	0,0630
0,8	0,0435	0,0477	0,0518	0,0556	0,0591	0,0623	0,0650	0,0672	0,0688	0,0697	0,0700
0,7	0,0482	0,0529	0,0575	0,0617	0,0657	0,0694	0,0725	0,0751	0,0770	0,0782	0,0785
0,6	0,0536	0,0590	0,0640	0,0689	0,0735	0,0777	0,0814	0,0845	0,0869	0,0883	0,0887
0,5	0,0599	0,0659	0,0717	0,0773	0,0826	0,0876	0,0921	0,0960	0,0990	0,1009	0,1014
0,4	0,0672	0,0739	0,0805	0,0870	0,0933	0,0994	0,1051	0,1101	0,1142	0,1169	0,1176
0,3	0,0755	0,0830	0,0906	0,0982	0,1059	0,1134	0,1208	0,1277	0,1337	0,1380	0,1391
0,2	0,0849	0,0935	0,1022	0,1112	0,1205	0,1301	0,1401	0,1501	0,1598	0,1677	0,1709
0,1	0,0955	0,1053	0,1154	0,1261	0,1375	0,1500	0,1637	0,1790	0,1964	0,2150	0,2229
0,05	0,1013	0,1117	0,1226	0,1343	0,1470	0,1611	0,1773	0,1965	0,2205	0,2520	0,2700

$M_x \quad l_y = 1,2 l_x$

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,2	0,0436	0,0482	0,0530	0,0583	0,0640	0,0703	0,0773	0,0850	0,0934	0,1026	0,1075
1,0	0,0507	0,0559	0,0616	0,0678	0,0745	0,0820	0,0902	0,0993	0,1093	0,1202	0,1261
0,9	0,0541	0,0597	0,0657	0,0723	0,0796	0,0877	0,0966	0,1065	0,1175	0,1296	0,1361
0,8	0,0572	0,0632	0,0696	0,0767	0,0845	0,0932	0,1029	0,1138	0,1259	0,1394	0,1467
0,7	0,0602	0,0665	0,0733	0,0808	0,0892	0,0986	0,1092	0,1212	0,1347	0,1499	0,1581
0,6	0,0629	0,0695	0,0767	0,0847	0,0936	0,1038	0,1154	0,1286	0,1438	0,1611	0,1706
0,5	0,0654	0,0722	0,0797	0,0882	0,0977	0,1086	0,1213	0,1360	0,1532	0,1733	0,1846
0,4	0,0675	0,0745	0,0824	0,0912	0,1013	0,1130	0,1268	0,1432	0,1630	0,1869	0,2006
0,3	0,0692	0,0764	0,0845	0,0937	0,1043	0,1168	0,1318	0,1500	0,1729	0,2021	0,2197
0,2	0,0704	0,0778	0,0861	0,0956	0,1067	0,1198	0,1358	0,1559	0,1826	0,2194	0,2435
0,1	0,0712	0,0787	0,0871	0,0968	0,1081	0,1217	0,1384	0,1601	0,1904	0,2379	0,2750
0,05	0,0714	0,0789	0,0873	0,0971	0,1084	0,1221	0,1391	0,1613	0,1927	0,2454	0,2931

 M_y

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,2	0,0286	0,0314	0,0341	0,0365	0,0388	0,0407	0,0424	0,0437	0,0447	0,0453	0,0455
1,0	0,0341	0,0375	0,0406	0,0436	0,0463	0,0486	0,0506	0,0522	0,0534	0,0541	0,0543
0,9	0,0376	0,0412	0,0447	0,0480	0,0510	0,0535	0,0559	0,0576	0,0590	0,0598	0,0600
0,8	0,0415	0,0456	0,0495	0,0531	0,0565	0,0595	0,0620	0,0641	0,0657	0,0666	0,0669
0,7	0,0461	0,0506	0,0550	0,0591	0,0630	0,0665	0,0695	0,0720	0,0737	0,0749	0,0752
0,6	0,0515	0,0565	0,0615	0,0662	0,0706	0,0747	0,0782	0,0813	0,0835	0,0849	0,0853
0,5	0,0578	0,0635	0,0691	0,0745	0,0796	0,0845	0,0889	0,0926	0,0956	0,0974	0,0979
0,4	0,0649	0,0714	0,0778	0,0841	0,0903	0,0962	0,1017	0,1067	0,1107	0,1133	0,1140
0,3	0,0732	0,0805	0,0879	0,0953	0,1028	0,1102	0,1174	0,1243	0,1302	0,1344	0,1355
0,2	0,0826	0,0909	0,0995	0,1083	0,1174	0,1269	0,1367	0,1467	0,1563	0,1641	0,1664
0,1	0,0932	0,1027	0,1126	0,1231	0,1344	0,1467	0,1603	0,1755	0,1929	0,2113	0,2187
0,05	0,0989	0,1091	0,1198	0,1313	0,1438	0,1578	0,1739	0,1930	0,2169	0,2483	0,2664

M_x $l_y = 1,3 l_x$

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,3	0,0459	0,0506	0,0556	0,0609	0,0667	0,0730	0,0797	0,0871	0,0950	0,1036	0,1082
1,0	0,0561	0,0618	0,0680	0,0747	0,0818	0,0896	0,0982	0,1075	0,1177	0,1287	0,1347
0,9	0,0593	0,0654	0,0720	0,0790	0,0867	0,0951	0,1043	0,1145	0,1256	0,1378	0,1444
0,8	0,0623	0,0687	0,0757	0,0832	0,0914	0,1005	0,1105	0,1216	0,1339	0,1474	0,1548
0,7	0,0652	0,0719	0,0792	0,0872	0,0959	0,1057	0,1166	0,1287	0,1424	0,1576	0,1660
0,6	0,0678	0,0748	0,0825	0,0909	0,1002	0,1107	0,1225	0,1360	0,1513	0,1687	0,1783
0,5	0,0702	0,0774	0,0854	0,0942	0,1042	0,1154	0,1283	0,1432	0,1606	0,1807	0,1921
0,4	0,0722	0,0796	0,0880	0,0972	0,1077	0,1197	0,1337	0,1503	0,1703	0,1942	0,2080
0,3	0,0738	0,0815	0,0900	0,0996	0,1106	0,1234	0,1386	0,1571	0,1801	0,2093	0,2270
0,2	0,0750	0,0828	0,0916	0,1015	0,1128	0,1263	0,1425	0,1629	0,1897	0,2266	0,2507
0,1	0,0757	0,0836	0,0925	0,1026	0,1142	0,1281	0,1452	0,1671	0,1974	0,2449	0,2821
0,05	0,0759	0,0838	0,0928	0,1029	0,1146	0,1286	0,1459	0,1683	0,1998	0,2524	0,3002

 M_y

t_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,3	0,0250	0,0274	0,0297	0,0318	0,0337	0,0354	0,0369	0,0380	0,0388	0,0393	0,0395
1,0	0,0323	0,0354	0,0384	0,0412	0,0438	0,0460	0,0479	0,0494	0,0505	0,0512	0,0514
0,9	0,0356	0,0391	0,0424	0,0455	0,0484	0,0508	0,0530	0,0547	0,0560	0,0568	0,0570
0,8	0,0395	0,0434	0,0471	0,0506	0,0538	0,0566	0,0591	0,0611	0,0626	0,0635	0,0637
0,7	0,0441	0,0484	0,0526	0,0565	0,0602	0,0635	0,0664	0,0688	0,0706	0,0716	0,0719
0,6	0,0495	0,0543	0,0591	0,0636	0,0678	0,0717	0,0752	0,0781	0,0803	0,0817	0,0820
0,5	0,0557	0,0612	0,0666	0,0718	0,0768	0,0815	0,0858	0,0894	0,0923	0,0941	0,0946
0,4	0,0628	0,0691	0,0753	0,0814	0,0874	0,0932	0,0986	0,1035	0,1074	0,1100	0,1107
0,3	0,0711	0,0782	0,0854	0,0926	0,0999	0,1072	0,1143	0,1210	0,1269	0,1311	0,1322
0,2	0,0805	0,0886	0,0969	0,1056	0,1145	0,1239	0,1336	0,1434	0,1530	0,1607	0,1631
0,1	0,0911	0,1004	0,1101	0,1204	0,1316	0,1437	0,1571	0,1723	0,1896	0,2080	0,2154
0,05	0,0968	0,1068	0,1173	0,1286	0,1410	0,1548	0,1708	0,1890	0,2136	0,2450	0,2630

$M_x \quad t_y = 1,4 t_x$

t_y/t_x	t_x/t_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,4	0,0475	0,0523	0,0574	0,0628	0,0685	0,0741	0,0812	0,0883	0,0959	0,1040	0,1082
1,0	0,0606	0,0668	0,0733	0,0803	0,0878	0,0960	0,1048	0,1143	0,1246	0,1358	0,1419
0,9	0,0636	0,0701	0,0771	0,0845	0,0925	0,1012	0,1106	0,1210	0,1324	0,1446	0,1512
0,8	0,0665	0,0734	0,0807	0,0885	0,0970	0,1064	0,1165	0,1279	0,1404	0,1540	0,1613
0,7	0,0693	0,0764	0,0840	0,0923	0,1013	0,1114	0,1225	0,1349	0,1487	0,1640	0,1723
0,6	0,0718	0,0792	0,0872	0,0959	0,1055	0,1163	0,1283	0,1420	0,1574	0,1749	0,1845
0,5	0,0740	0,0817	0,0900	0,0991	0,1093	0,1209	0,1339	0,1491	0,1666	0,1868	0,1981
0,4	0,0760	0,0839	0,0925	0,1020	0,1127	0,1251	0,1392	0,1560	0,1761	0,2002	0,2140
0,3	0,0775	0,0856	0,0945	0,1044	0,1156	0,1287	0,1440	0,1624	0,1859	0,2152	0,2388
0,2	0,0787	0,0869	0,0960	0,1062	0,1177	0,1315	0,1479	0,1685	0,1954	0,2324	0,2566
0,1	0,0794	0,0877	0,0969	0,1073	0,1191	0,1333	0,1505	0,1726	0,2031	0,2507	0,2879
0,05	0,0796	0,0879	0,0971	0,1076	0,1195	0,1338	0,1512	0,1738	0,2055	0,2581	0,3060

 M_y

t_y/t_x	t_x/t_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,4	0,0216	0,0237	0,0257	0,0276	0,0292	0,0307	0,0319	0,0329	0,0336	0,0340	0,0341
1,0	0,0305	0,0334	0,0363	0,0393	0,0413	0,0434	0,0452	0,0466	0,0476	0,0483	0,0484
0,9	0,0338	0,0371	0,0402	0,0431	0,0458	0,0482	0,0502	0,0519	0,0531	0,0539	0,0541
0,8	0,0377	0,0414	0,0449	0,0482	0,0512	0,0540	0,0563	0,0582	0,0596	0,0606	0,0608
0,7	0,0422	0,0464	0,0504	0,0542	0,0577	0,0609	0,0636	0,0659	0,0676	0,0687	0,0690
0,6	0,0476	0,0523	0,0568	0,0612	0,0653	0,0690	0,0722	0,0752	0,0774	0,0787	0,0790
0,5	0,0538	0,0591	0,0643	0,0694	0,0743	0,0788	0,0830	0,0866	0,0894	0,0911	0,0916
0,4	0,0609	0,0670	0,0730	0,0791	0,0849	0,0905	0,0958	0,1006	0,1045	0,1070	0,1077
0,3	0,0692	0,0762	0,0832	0,0902	0,0974	0,1045	0,1115	0,1182	0,1240	0,1281	0,1292
0,2	0,0786	0,0866	0,0947	0,1032	0,1120	0,1212	0,1308	0,1406	0,1501	0,1578	0,1601
0,1	0,0892	0,0983	0,1079	0,1180	0,1290	0,1410	0,1544	0,1694	0,1866	0,2051	0,2124
0,05	0,0950	0,1047	0,1150	0,1262	0,1384	0,1522	0,1680	0,1869	0,2107	0,2420	0,2601

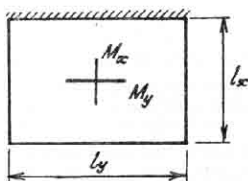
$M_x \quad l_y = 1,5 l_x$

l_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,5	0,0486	0,0535	0,0586	0,0640	0,0696	0,0757	0,0821	0,0888	0,0961	0,1037	0,1077
1,0	0,0642	0,0707	0,0777	0,0849	0,0927	0,1011	0,1100	0,1197	0,1302	0,1414	0,1474
0,9	0,0671	0,0739	0,0812	0,0889	0,0972	0,1061	0,1158	0,1263	0,1377	0,1501	0,1566
0,8	0,0699	0,0770	0,0846	0,0927	0,1016	0,1111	0,1216	0,1330	0,1455	0,1593	0,1666
0,7	0,0725	0,0800	0,0879	0,0965	0,1058	0,1160	0,1273	0,1398	0,1538	0,1691	0,1774
0,6	0,0749	0,0827	0,0910	0,1000	0,1098	0,1208	0,1330	0,1466	0,1624	0,1799	0,1894
0,5	0,0771	0,0851	0,0938	0,1031	0,1135	0,1253	0,1385	0,1538	0,1714	0,1917	0,2030
0,4	0,0790	0,0871	0,0960	0,1060	0,1169	0,1294	0,1438	0,1607	0,1808	0,2050	0,2188
0,3	0,0805	0,0889	0,0980	0,1082	0,1197	0,1329	0,1486	0,1673	0,1905	0,2198	0,2374
0,2	0,0816	0,0901	0,0995	0,1099	0,1218	0,1357	0,1524	0,1730	0,2000	0,2370	0,2613
0,1	0,0823	0,0909	0,1004	0,1110	0,1232	0,1375	0,1549	0,1771	0,2078	0,2555	0,2926
0,05	0,0825	0,0911	0,1006	0,1113	0,1235	0,1380	0,1556	0,1783	0,2102	0,2628	0,3106

 M_y

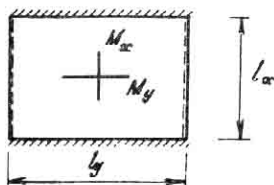
l_y/l_x	t_x/l_x										
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
1,5	0,0187	0,0205	0,0222	0,0238	0,0252	0,0265	0,0275	0,0284	0,0290	0,0293	0,0294
1,0	0,0288	0,0316	0,0343	0,0367	0,0390	0,0410	0,0427	0,0440	0,0450	0,0457	0,0458
0,9	0,0321	0,0352	0,0382	0,0410	0,0436	0,0458	0,0478	0,0493	0,0505	0,0512	0,0514
0,8	0,0360	0,0395	0,0429	0,0461	0,0490	0,0516	0,0539	0,0557	0,0571	0,0579	0,0581
0,7	0,0406	0,0446	0,0484	0,0520	0,0554	0,0585	0,0612	0,0634	0,0651	0,0661	0,0664
0,6	0,0459	0,0505	0,0549	0,0591	0,0631	0,0667	0,0700	0,0727	0,0748	0,0761	0,0765
0,5	0,0521	0,0572	0,0624	0,0673	0,0721	0,0765	0,0806	0,0841	0,0868	0,0886	0,0891
0,4	0,0593	0,0652	0,0711	0,0770	0,0827	0,0882	0,0935	0,0981	0,1020	0,1045	0,1052
0,3	0,0676	0,0744	0,0812	0,0882	0,0952	0,1022	0,1092	0,1157	0,1215	0,1255	0,1267
0,2	0,0770	0,0848	0,0928	0,1011	0,1098	0,1189	0,1284	0,1381	0,1476	0,1553	0,1576
0,1	0,0876	0,0965	0,1059	0,1160	0,1268	0,1387	0,1520	0,1670	0,1842	0,2024	0,2097
0,05	0,0933	0,1029	0,1131	0,1242	0,1363	0,1499	0,1656	0,1845	0,2082	0,2394	0,2576

B.2) Ploča čija je jedna ivica puno uklještena a ostale tri slobodno oslonjene



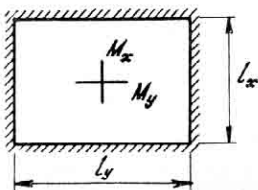
$\frac{l_x}{l_y}$	Moment	$\frac{l_y}{l_{min}}$	$\frac{t_x}{l_{min}}$			
			0,30	0,20	0,10	0,05
0,8	M_x	0,30	0,132	0,154	0,184	0,201
		0,20	0,137	0,164	0,201	0,225
		0,10	0,141	0,172	0,219	0,256
		0,05	0,143	0,174	0,226	0,274
	M_y	0,30	0,097	0,103	0,107	0,108
		0,20	0,119	0,129	0,136	0,138
		0,10	0,148	0,165	0,183	0,191
		0,05	0,165	0,189	0,220	0,238
1,0	M_x	0,30	0,121	0,144	0,173	0,190
		0,20	0,127	0,153	0,190	0,214
		0,10	0,131	0,161	0,208	0,245
		0,05	0,133	0,163	0,216	0,263
	M_y	0,30	0,106	0,112	0,116	0,117
		0,20	0,128	0,137	0,145	0,147
		0,10	0,156	0,174	0,192	0,199
		0,05	0,174	0,198	0,229	0,247
1,2	M_x	0,30	0,122	0,144	0,173	0,191
		0,20	0,128	0,154	0,190	0,214
		0,10	0,132	0,162	0,209	0,246
		0,05	0,133	0,164	0,216	0,264
	M_y	0,30	0,128	0,134	0,138	0,139
		0,20	0,151	0,160	0,168	0,170
		0,10	0,179	0,197	0,215	0,223
		0,05	0,197	0,221	0,252	0,270

B.3) Ploča čije su dve naspramne strane uklještene a druge dve slobodno oslonjene



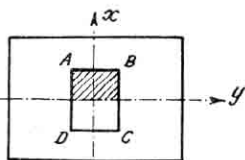
$\frac{l_x}{l_y}$	Moment	$\frac{t_y}{l_{min}}$	t_x/l_{min}			
			0,30	0,20	0,10	0,05
0,8	M_x	0,30	0,119	0,141	0,170	0,188
		0,20	0,124	0,151	0,187	0,211
		0,10	0,128	0,158	0,205	0,243
		0,05	0,129	0,160	0,213	0,261
	M_y	0,30	0,083	0,088	0,092	0,093
		0,20	0,104	0,113	0,121	0,123
		0,10	0,133	0,150	0,168	0,175
		0,05	0,150	0,174	0,205	0,223
1,0	M_x	0,30	0,115	0,137	0,166	0,183
		0,20	0,120	0,146	0,183	0,207
		0,10	0,124	0,154	0,202	0,238
		0,05	0,126	0,156	0,209	0,256
	M_y	0,30	0,089	0,094	0,098	0,099
		0,20	0,110	0,119	0,127	0,130
		0,10	0,139	0,156	0,174	0,181
		0,05	0,156	0,179	0,211	0,229
1,2	M_x	0,30	0,120	0,142	0,171	0,189
		0,20	0,126	0,152	0,189	0,213
		0,10	0,130	0,160	0,207	0,244
		0,05	0,131	0,162	0,214	0,262
	M_y	0,30	0,111	0,117	0,121	0,122
		0,20	0,133	0,143	0,151	0,153
		0,10	0,162	0,179	0,198	0,205
		0,05	0,179	0,203	0,235	0,253

B.4) Ploča uklještena sa sve četiri strane

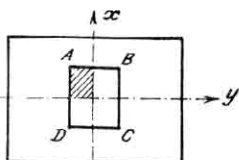


$\frac{L_x}{L_y}$	Moment	$\frac{t_y}{t_x}$	t_x/L_x			
			0,30	0,20	0,10	0,05
0,8	M_x	0,30	0,109	0,131	0,160	0,177
		0,20	0,115	0,140	0,177	0,201
		0,10	0,119	0,148	0,195	0,232
		0,05	0,120	0,150	0,203	0,250
	M_y	0,30	0,089	0,094	0,098	0,100
		0,20	0,110	0,120	0,127	0,130
		0,10	0,139	0,156	0,174	0,181
		0,05	0,156	0,180	0,211	0,229
1,0	M_y	0,30	0,093	0,099	0,103	0,104
		0,20	0,114	0,124	0,132	0,134
		0,10	0,143	0,160	0,178	0,186
		0,05	0,160	0,184	0,215	0,233

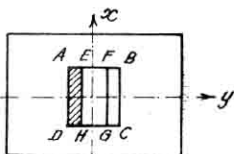
Primena tablica B.2, B.3 i B.4 za opterećenja
ekscentrična u odnosu na srednje ploče



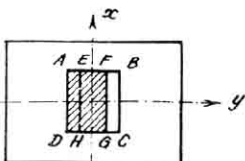
$$M = \frac{1}{2} M_{ABCD}$$



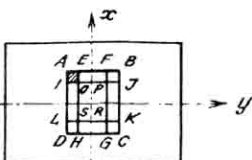
$$M = \frac{1}{4} M_{ABCD}$$



$$M = \frac{1}{2} (M_{ABCD} - M_{EFGH})$$



$$M = \frac{1}{2} (M_{ABCD} + M_{EFGH})$$



$$M = \frac{1}{4} (M_{ABCD} - M_{EFGH} - M_{IJKL} + M_{OPRS})$$

L I T E R A T U R A

- 1) GIRKMANN, K. : Flächentragwerke. Wien: Springer-Verlag 1959.
- 2) TIMOSHENKO, S. : Theory of Plates and Shells. New York and London: Mc Graw-Hill Book Comp. 1948.
- 3) BEYER, K. : Die Statik im Eisenbetonbau. Berlin: Springer 1934.
- 4)
- 5) PUCHER, A. : Einflussfelder elastischer Platten. Wien. Springer-Verlag. 1958.
- 6) MARCUS, H. : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung Biegsamer Platten. Berlin: Springer. 1924.
- 7) MARCUS, H. : Die vereinfachte Berechnung Biegsamer Platten. Berlin: Springer. 1925.
- 8)
- 9)
- 10) BITTNER, E. : Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Wien: Springer. 1938.
- 11) ZLOKOVIĆ, DJ. : Momenti za središte elastičnih ploča od centričnog ravnomerno podeljenog opterećenja. "Naše gradjevinarstvo". 1958.

DRUGI DEO

**PLOČE NAPREGNUTE U SVOJOJ
RAVNI**

1. OSNOVNE JEDNAČINE PLOČE U DESCARTEOVIM KOORDINATAMA

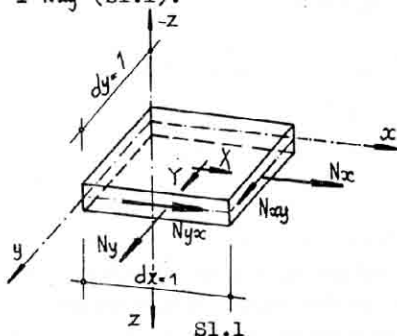
1.1 Naponi i presečne sile. Uslovi ravnoteže.

Za ploče opterećene zapreminskim ili površinskim silama ravnomerno raspoređenim po debljini ploče i paralelnim srednjoj ravni, kažemo da su napregnute u svojoj ravni.

Ova vrsta naprezanja naziva se r a v n i m n a p r e z a n j e m.

Srednja ravan ploče za ovu vrstu naprezanja ostaje ravna i posle deformacije. Drugim rečima, deformacija se odvija bez krivljenja ploče.

Ravno naprezanje karakterišu, kao što smo u prvom delu napomenuli, u Descartes-ovom koordinatnom sistemu OXYZ presečne sile N_x , N_y i N_{xy} (sl.1).



Sl.1

S obzirom da je, prema učinjenoj pretpostavci, opterećenje ploče ravnomerno raspoređeno po njenoj debljini, u teoriji ploča napregnutih u svojoj ravni uzima se da su i naponi σ_x , σ_y i τ_{xy} ravnomerno raspoređeni po debljini ploče.

Shodno ovoj pretpostavci, presečne sile date su izrazima:

$$N_x = h\sigma_x ; N_{xy} = h\tau_{xy} ; N_y = h\sigma_y \quad (1)$$

Isto tako pretpostavlja se da su naponi σ_z , τ_{xz} i τ_{zy} u celoj oblasti identički ravni nuli. Ovi naponi su, svakako, s obzirom na to da osnove ploče nisu opterećene, za $z = \pm h/2$ jednaki nuli. Kako je debljina ploče mala, može se sa razlogom smatrati

da ti naponi između osnova mogu imati male vrednosti u poređenju sa ostalim komponentalnim naponima i da se mogu zanemariti.

Zapreminsku silu \vec{F} čije ćemo komponente u pravcu x i y ose obeležiti sa \bar{X} i \bar{Y} , možemo zameniti površinskim opterećenjem \vec{F} . Pri učinjenoj pretpostavci o rasporedu i pravcu zapreminskih sila, nalazimo:

$$\vec{F} = h \vec{F}$$

Komponente površinskog opterećenja, koje deluju u srednjoj ravni ploče, u pravcima x i y ose, jednaki su:

$$X = h \bar{X}$$

$$Y = h \bar{Y}$$

Površinsko opterećenje \vec{p}_n sa komponentama \vec{p}_{nx} i \vec{p}_{ny} zamenjuje se linijskim opterećenjem \vec{p}_n (sl.2)

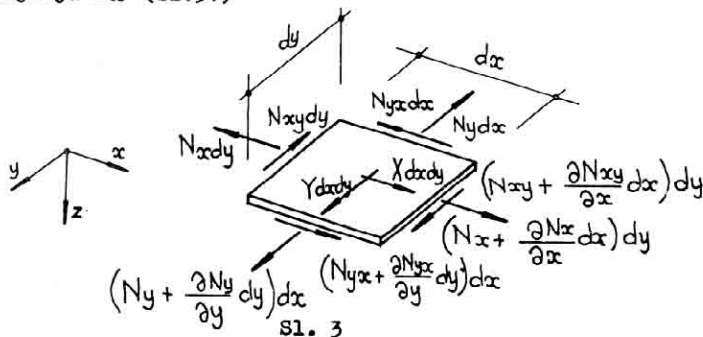
$$\vec{p}_n = h \vec{p}_n$$

odnosno:

$$p_{nx} = h p_{nx} ; p_{ny} = h p_{ny}$$



Vežu između presečnih sila i površinskog opterećenja dobićemo iz uslova ravnoteže sila koje napadaju elementarnu prizmu isečenu iz ploče sa dve ravni paralelne sa xz - ravni na rastojanju dy i dve ravni paralelne sa yz - ravni na rastojanju dx (sl.3.)



Na strani $x = \text{const}$ delovaće sile $N_{xy}dy$ i $N_{yx}dy$, a na nespremnoj strani $x+dx = \text{const}$, sile koje će se razlikovati od prethodnih za prirušteje $\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy$ odn. $\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx dy$

Isto tako imaćemo za $y = \text{const}$, sile $N_y dx$ i $N_{yx} dx$, a za $y+dy = \text{const}$, sile:

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx \quad \text{i} \quad \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy\right) dx$$

Postavljajući uslov da je zbir svih sila u pravcu težišne ose paralelne x-osi jednak nuli nalazimo, posle krećenja se $dx dy$, dobijamo:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (2a)$$

Analogno ovome uslov ravnoteže projekcija svih sila na pravac paralelan y-osi daje:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + Y = 0 \quad (2b)$$

Izjednačujući zbir momenata svih sila oko z-ose dobijamo:

$$N_{yx} = N_{xy}$$

Ustvari, s obzirom da je $N_{yx} = h \tau_{yx}$ i $N_{xy} = h \tau_{xy}$, ovaj izraz je dobro poznat stav o konjugovanosti smičućih napona.

Ostala dva uslova ravnoteže: zbir momenata oko osovina paralelnih x i y -osi, identički su zadovoljena jer sile deluju u srednjoj ravni ploče.

Treba primetiti da su jednačine (2) ustvari Navier-ove jednačine, samo sa drugim oznakama. Pod pretpostavkom da je

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = G_z = 0$$

množeći Navier-ove jednačine sa h dobijamo jednačine (2).

I ovde, kao i kod ploča napregnutih na savijanje, uslovi ravnoteže uz odgovarajuće konturne uslove nisu dovoljni za rešenje zadatka. Broj presečnih sila veći je za jedan od uslova ravnoteže. Zadatak je, drugim rečima, statički neodređen i za njegovo rešenje treba da razmotrimo i deformaciju ploče.

1.2 Deformacija ploče. Veze između statičkih i deformacijskih veličina.

Prema učinjenim pretpostavkama i napomenama, komponentalne deformacije shodno Hooke-ovom zakonu date su izrazima:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{zx} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

odnosno preko presečnih sila:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{Eh} (N_x + N_y) \end{aligned} \quad (4)$$

S druge strane, komponentalne deformacije možemo izraziti preko pomeranja u, v, w u pravcima x, y i z ose:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

Funkcije ϵ_x , ϵ_y i γ_{xy} nisu, kao što se vidi iz jednačina (5) potpuno nezavisne, već moraju zadovoljiti tzv. uslov o poklapanju deformacija. Naime, diferencirajući prvu iz jednačina (5) dva puta po y a drugu dva puta po x i sabirajući, nalazimo:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (6)$$

S druge strane, diferencirajući jednačinu (5c) po x i y dobijamo:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

S obzirom da su leve strane jednačina (6) i (7) jednake, moraju biti i desne, pa dobijamo;

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

Od ukupno šest uslove o poklapanju deformacije u opštem slučaju za slučaj ravnog napreženja ostaje samo uslov (8).

Presečne sile ploče možemo, slično kao i kod ploče napregnute na savijanje, izraziti preko pomeranja, rešavajući jednačine (4a,b,c) po presečnim silama i unoseći za komponentalne deformacije izreze (5a,b,c), pa nalazimo:

$$N_x = D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$N_y = D \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2} D (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

gde je sa D obeleženo:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} h$$

1.3 Diferencijalna jednačina ploče. Naponska funkcija.

Jednačine (2) i (9) sa odgovarajućim graničnim uslovima, o čemu će kasnije biti reči, u potpunosti definišu problem ploče napregnute u svojoj ravni. Ukupan broj nepoznatih presečnih sila i pomeranja je 5, a isto toliko imamo na raspolaganju diferencijalnih jednačina.

Isto tako, i jednačine (2) u kombinaciji sa jednačinama (4a,b,c) i uslovom kompetibilnosti (8), imejući u vidu odgovarajuće uslove na konturi, potpuno definišu problem. U šest jednačina figuriše ukupno šest nepoznatih veličina $N_x, N_y, N_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$.

Iz prvog sistema jednačina (jedn. 2 i 9) možemo eliminisati statičke veličine unoseći u izreze (2) njihove vrednosti iz jednačine (9).

Na taj način dobijamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X}{D} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y}{D} = 0$$

U jednačinama (10) imamo samo geometrijske nepoznate i opterećenje. Ovaj postupak svodenja problema na deformacijske nepoznate, slično kao u teoriji linijskih nosača možemo nazvati **METODOM DEFORMACIJE**.

S druge strane iz sistema jednačina (2,4a,b,c,8) možemo lako eliminisati deformacijske veličine. Izrazimo li u uslovu kompatibilnosti komponentalne deformacije preko presečnih sila (jedn.4a,b,c), dobićemo, zajedno sa jednačinama (2) sistem od tri diferencijalne jednačine u kojima će figurisati samo presečne sile:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \lambda = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \gamma = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \nu N_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \nu N_y) - 2(1+\nu) \cdot \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Rešenje zadatka preko jednačina (11) bilo bi, za razliku od rešenja (10) u stvari METOD SILA.

Metod deformacije kod ploča napregnutih u svojoj ravni, za razliku od ploča napregnutih na savijanje, nije našao veću primenu u rešavanju pojedinih problema. Razlog za to leži prvenstveno u tome što metod sila, kao što ćemo videti kasnije, sa matematičkog gledišta pruža veće mogućnosti za praktično rešenje pojedinih zadataka. Ovo dolazi naročito onda do izražaja ako su granični uslovi dati po silama.

Priroda jednačina (11) je takva da se one lako, uvodjenjem takozvane naponske funkcije F sa osobinom:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -N_{xy} \quad (12)$$

i pod pretpostavkom da se komponente opterećenja λ, γ mogu izraziti kao parcijalni izvodi neke funkcije potencijala U , što je redovno slučaj u našim zadacima, - mogu svesti na jednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda. Stavljajući, naime:

$$\lambda = -\frac{\partial U}{\partial x} ; \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (13)$$

iz jednačine (11a,b) nalazimo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - U \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(N_y - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - U \right) = 0$$

Ove jednačine biće zadovoljene ako stavimo:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U ; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U \quad (14)$$

Funkcija F naziva se obično A I R Y - jeva funkcija, prema engleskom astronomu G.B. Airy-ú koji ju je 1862. godine uveo.

Unošenjem izraza (12) i (14) u jednačinu (11c) dobijamo konačno:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (15)$$

ili kraće, beležavajući sa:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (16)$$

$$\Delta \Delta F + (1-\nu) \Delta U = 0$$

Kao što vidimo, problem ploče napregnute u svojoj ravni svodi se na diferencijalnu jednačinu istog oblika kao i problem ploče napregnute na savijanje. Rešenjem diferencijalne jednačine (16) uz odgovarajuće granične uslove dobijamo rešenje zadatka

U već ni naših primera ploča je opterećena samo na konturi tako da su sile X i Y u celoj oblasti ravne nuli. Ako to i nije slučaj, naprimer, pod uticajem opterećenja sopstvenom težinom, često se takvo opterećenje zamenjuje statički ekvivalentnim opterećenjem na konturi. Za slučaj da su sile X i Y konstantne u celoj oblasti (ili jednake nuli), jednačina (16) prelazi u biharmonijsku jednačinu:

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (17)$$

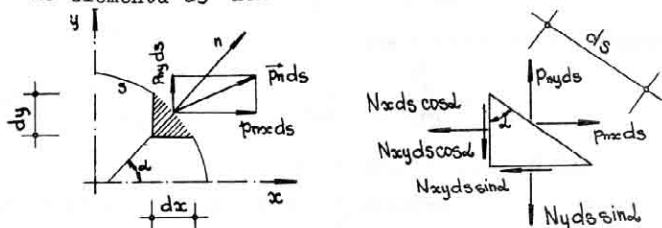
Treba zapaziti da u tom slučaju s obzirom da se u diferencijalnoj jednačini ne pojavljuje Poisson-ov broj ν , rešenje zadatka ne zavisi od vrednosti elastičnih konstanti. Za svaki idealno elastični materijal dobija se isto rešenje.

1.4. Granični uslovi

Granični uslovi duž konture ploče mogu biti slično kao i kod ploča napregnutih na savijanje, dati po silama, pomeranjima ili mešovito.

Razmotrićemo prvo granične uslove kad su oni dati po silama.

Na elementu ds konture S



Sl. 4.

Čija normala \vec{n} zaklapa sa pozitivnim pravcem x-ose ugao α , deluje linijsko opterećenje veličine $\vec{p}nds$ (sl.4a). Komponente ovog opterećenja u pravcima x i y, prema ranije rečenom, obeležićemo sa $p_{nx}ds$, odnosno sa $p_{ny}ds$. Uslov ravnoteže spoljnih i unutrašnjih sila koje napadaju elementarnu prizmu čija jedna strana sadrži element konture ds (sl.4b), daje:

$$N_{xx} \cos \alpha + N_{xy} \sin \alpha = p_{nx} \quad (18a, b)$$

$$N_{xy} \cos \alpha + N_{yy} \sin \alpha = p_{ny}$$

Jednačine (18) nisu ništa drugo, nego, iz otpornosti materijala, dobro poznati površinski uslovi.

Za rešenje zadatka primenom Airy-ove funkcije potrebno je i granične uslove izraziti preko naponske funkcije.

Unošenjem izraza za presečne sile putem naponske funkcije imajući u vidu da je: (sl.4b)

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

dobijamo:

$$p_{nx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + U \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) + U \frac{dy}{ds} \quad (19)$$

$$- p_{ny} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} + U \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) + U \frac{dx}{ds}$$

Obeležavajući sa:

$$p_{nx}^* = p_{nx} - U \frac{dy}{ds}$$

$$p_{ny}^* = p_{ny} - U \frac{dx}{ds}$$

Integracijom jednačine (19) duž konture počev od neke unapred usvojene tačke 0 do proizvoljne tačke S nalazimo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^S p_{nx}^* ds + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \quad (20)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^S p_{ny}^* ds + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0$$

Konstante $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0$ i $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0$ nemaju, s obzirom na jednačine (12) i (14) nikakvog uticaja na naprezanje ploče, pa možemo u deljem razmatranju staviti da su jednake nuli.

Integrali $T_x = \int_0^S p_{nx}^* ds$ i $T_y = \int_0^S p_{ny}^* ds$ predstavljaju očigledno projekcije rezultante nekog opterećenja \vec{p}_n^* , sa projekcijama p_{nx}^* i p_{ny}^* , koje smatramo da deluju na delu konture od 0 do S.

Za slučaj da su površinske sile X i Y ravne nuli ovi izrezi predstavljaju projekcije rezultante stvarnog opterećenja koje deluje na delu konture od 0 do S.

Sa ovim napomenama izraze (20) možemo pisati u obliku:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -T_y \quad (21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = T_x$$

Airy-ovu funkciju F naći ćemo iz njenog totalnog diferencijala:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Imajući u vidu izraze (21), integrirajući duž konture nalazimo:

$$F = \int_0^S (T_x dy - T_y dx)$$

Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$F = [T_x y - T_y x]_0^S - \int_0^S (y dT_x - x dT_y)$$

Odnosno, s obzirom na jednačine (20):

$$F = \int_0^S (x - x_0) p_{ny}^* ds + \int_0^S (y - y_0) p_{nx}^* ds \quad (22)$$

Izraz (22) nije očigledno ništa drugo nego celokupni momenat M opterećenja " \vec{p}_n^* " na delu konture od 0 do s , a u odnosu na tačku s .

$$F - M \quad (23)$$

Za slučaj odsustva površinskih sila vrednost M predstavlja veličinu statičkog momenta stvarnog opterećenja na posmatranom delu konture u odnosu na tačku s .

Za određivanje vrednosti F , $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ možemo korisno upotrebiti model linijskog nosača čija se osovina poklapa sa konturom i koji je opterećen datim opterećenjem " \vec{p}_n^* ". U jednom proizvoljno usvojenom preseku modela-nosača smatramo da su sve presečne sile ravne nuli. Tada u proizvoljnom preseku takvog nosača momenat savijanja M i projekcije T_x i T_y rezultante unutrašnjih sila u pravcu x i y ose daju vrednost funkcije F i njenih izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Treba istaći da ove vrednosti koje se sračunavaju na osnovu datog opterećenja nisu međusobno nezavisne i da postoje u stvari samo dva nezavisna konturna uslova izražena preko funkcije F .

Predpostavimo da nam je na konturi zadata funkcija $F(s)$ i njen izvod po normalni $\frac{\partial F}{\partial n}$. Tada je poznato i $\frac{\partial F}{\partial s}$; pa na osnovu jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dn}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

možemo naći i izvode:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

Prema tome, konturne uslove za rešenje diferencijalne jednačine (16) možemo zadati preko funkcije F i izvoda po normalni $\frac{\partial F}{\partial n}$ ili preko parcijalnih izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Ovi uslovi i diferencijalna jednačina (16) potpuno definišu problem ploče opterećene površinskim opterećenjem i silama po konturi.

1.5 Pomeranje tačaka ploče

Pomeranje tačaka ploče možemo, kao što smo pokazali u Otpornosti materijala, naći preko komponentalnih deformacija iznalazeći predhodno odgovarajuće parcijalne izvode pomeranja.

Tako je naprimer:

$$u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy ; \quad v = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Izvodi $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$ i $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y$ dati su nam neposredno iz komponentalnih napona, dok izvode $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$ moramo naći integracijom iz njihovih parcijalnih izvoda.

Korišćenjem ovih obrazaca možemo naći komponentalna pomeranja ako komponentalne deformacije izrazimo preko presečnih sila, a ove opet kao izvode Airy-eve funkcije.

S obzirom da se radi o svega dva komponentalna pomeranja i da su ona funkcije dveju promenljivih (x,y) može se pokazati praktičnim i sledeći put za određivanje pomeranja:

Iz $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$ i $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y$ imamo:

$$hEU = \int (N_x - \nu N_y) dx + \phi(y) ; \quad hEV = \int (N_y - \nu N_x) dy + \psi(x)$$

Ovde nam se kao nepoznate funkcije javljaju dve funkcije jedne promenljive, $\phi(y)$ i $\psi(x)$.

Ako presečne sile izrazimo putem Airy-eve funkcije nalazimo:

$$hEU = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial F}{\partial x} + \phi(y) / 24 / \quad hEV = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} + \psi(x) / 25 /$$

Funkcije $\phi(y)$ i $\psi(x)$ nisu medjusobno nezavisne, već povezane uslovom: $\delta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

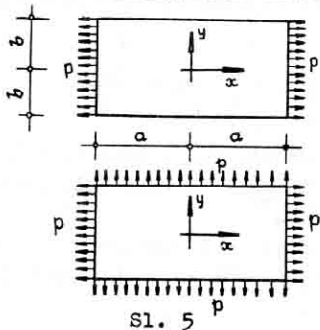
$$\text{ili} \quad Eh \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = Eh \delta_{xy} = 2(1+\nu) N_{xy} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy + \frac{d\phi(y)}{dy} + \frac{d\psi(x)}{dx} = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} / 26 /$$

Ako nam je funkcija $F(x,y)$ zadata, možemo pomeranja u i v sračunati iz jednačina (24) i (25). Funkcije $\phi(y)$ i $\psi(x)$ određujemo iz graničnih uslova, imajući u vidu da one moraju zadovoljiti uslov (26).

2. ELEMENTARNI SLUČAJEVI PLOČA NAPREGNUTIH U SVOJOJ RAVNI.

2.a) Pravougaona ploča opterećena ravnotežnim sistemom sila duž konture, kako je to prikazano na sl. 5 .



Očividno je da su granični uslovi kod jedne ovakve ploče:

$$\begin{aligned} \text{Za } x = a & \text{ su } N_x = p & N_{xy} = 0 \\ \text{Za } y = b & \text{ su } N_y = 0 & N_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Naponska funkcija $F = Cy^2$ zadovoljava date granične uslove kao i diferencijalnu jednačinu $\Delta\Delta F = 0$. Diferenciranjem dobijamo presečne sile:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2C \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

Iz graničnog uslova za konturu $x = a$, dobijamo da je konstanta $C = 1/2p$, pa konačno Airy-jevu funkciju možemo napisati:

$$F = \frac{p}{2} y^2$$

Za slučaj da i na konturama $y = b$ imamo opterećenje p , Airy-jeva funkcija dobija sledeći oblik:

$$F = \frac{p}{2} (x^2 + y^2)$$

Ako na konturama $y = b$ imamo opterećenje istog intenziteta ali suprotnog predznaka (znači pritisak) Airy-jeva funkcija dobija ovaj oblik:

$$F = \frac{p}{2} (y^2 - x^2)$$

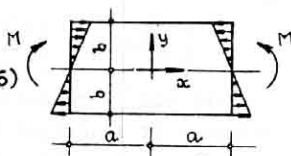
Razmotrimo sada slučaj kada na ploču deluju na ivicama $x = a$ dva jednaka momenta M koji se mogu pretstaviti putem opterećenja silama po zakonu

$$p_y = \frac{3M}{2b^3} y$$

Granični uslovi su očividno (sl.6)

za $x = \pm a$ su $N_x = -p_y$; $N_{xy} = 0$

za $y = \pm b$ su $N_y = N_{xy} = 0$



Sl. 6

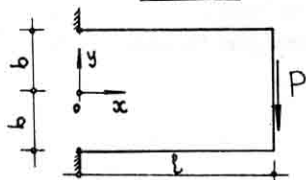
Airy-jeva funkcija koja zadovoljava ove uslove i jednačinu $\Delta\Delta F=0$ glasi:

$$F = -\frac{M}{4b^3} y^3$$

Diferenciranjem se dobijaju presečne sile:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{3M}{2b^3} y \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

2.2 Konzolna ploča opterećena koncentrisanom silom na kraju



Sl. 7

Za ploču i opterećenje prema slici 7 pretpostavićemo Airy-jevu funkciju u obliku polinoma:

$$F = c(l-x)(y^3 - 3by^2)$$

Diferenciranjem dobijamo izraze za presečne sile:

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6cy(l-x), \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 3c(x^2 - b^2)$$

Presečne sile zadovoljavaju sledeće granične uslove:

$$\begin{aligned} y=+b & \quad N_y = N_{xy} = 0 \\ x=l & \quad N_x = 0 \end{aligned}$$

Sem toga je integral smičućih sila po slobodnoj konturi napadnutoj silom P jednak sili P.

$$\int_{-b}^{+b} (N_{xy})_{x=l} dy = -P$$

Iz ovog uslova i odredjujemo konstantu C,

$$\int_{-b}^{+b} 3c(y^2 - b^2) dy = 3c \left(\frac{y^3}{3} - by^2 \right) \Big|_{-b}^{+b}; \quad C = \frac{P}{4b^3}$$

Ovim smo ustvari pretpostavili da je sila P raspoređena po konturi $x=l$ po parboličnom zakonu, kao i sile N_{xy} .

Ovako pretpostavljenom Airy-jevom funkcijom propisali smo donekle, kao što ćemo kasnije videti i granične uslove za ivicu $x = 0$. Naime pod uticajem smičućih sila deformišu se preseki $x = \text{const}$, odnosno ne ostaju ravni kao što se to pretpostavlja kod gređnih nosača, tako da i presek $x = 0$ dobija neka pomeranja što u potpunosti ne odgovara uslovima totalnog uklještenja pa je ovo rešenje samo približno. Možemo, naime, zadovoljiti samo uslov da tačka $O(x=0, y=0)$ nema nikakvo pomeranje i da tačke sa koordinatama $x=0$, $y=\pm b$ nemaju pomeranje u pravcu x -ose.

Komponentalna pomeranja sračunaćemo na osnovu izraza (24 i 25). Prvo moramo da sračunamo prve izvode funkcije $F(x, y)$ pa onda zamenom u jednačinu (24 i 25) dobijamo sledeće izraze za pomeranja:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -C(y^3 - 3by^2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -3C(l-x)(b^2 - y^2)$$

$$Ehu = 6Cy(lx - \frac{x^2}{2}) + vC(y^3 - 3by^2) + \phi(y)$$

$$Ehv = 3vC(l-x)(b^2 - y^2) + \Psi(x)$$

Uslov koji daje zavisnost izmedju funkcija $\phi(y)$ i $\Psi(x)$ glasi:

$$6C(lx - \frac{x^2}{2}) + \frac{d\Psi(x)}{dx} = -6C(b^2 - y^2) - \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Pošto je leva strana ove jednačine funkcija samo od x a desna funkcija samo od y , jednakost je održiva samo ako su obe strane jednake nekoj konstanti A_0 .

$$A_0 = 6C(lx - \frac{x^2}{2}) + \frac{d\Psi(x)}{dx}$$

$$A_0 = -6C(b^2 - y^2) + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Integracijom gornjih izraza dobijamo:

$$\psi = A_1 + A_0 x - C(3lx^2 + x^3)$$

$$\phi = A_2 - A_0 y - 2C(3b^2 y - y^3)$$

Konstante A_0 , A_1 i A_2 odredićemo iz već navedenih graničnih uslova:

za $x = 0$, $y = 0$; $Eh_u = 0$, što daje $(\phi)_{y=0} = 0$, odnosno $A_2 = 0$

za $x = 0$, $y = 0$; $Eh_v = 0$, što daje $(\psi)_{x=0} = -3vClb^2$
odnosno $A_1 = -3vClb^2$

za $x = 0$, $y = b$; $Eh_u = 0$, što daje $(\phi)_{y=b} = vC2b^3$
odnosno $A_0 = -2C(2+v)b^2$

Sa sračunatim vrednostima za konstante A_i odredićemo sada funkciju:

$$\psi = C[-3vb^2l - 2(2+v)b^2x - 3lx^2 + x^3]$$

pa je ugib u tački $x = l$ i $y = 0$

$$Eh_v = (\psi)_{x=l} = -C[2l^3 + (4+5v)lb^2]$$

$$v_1 = -\frac{Pl^3}{2Ehb^3} - (4+5v)\frac{Pl}{4Ehb}$$

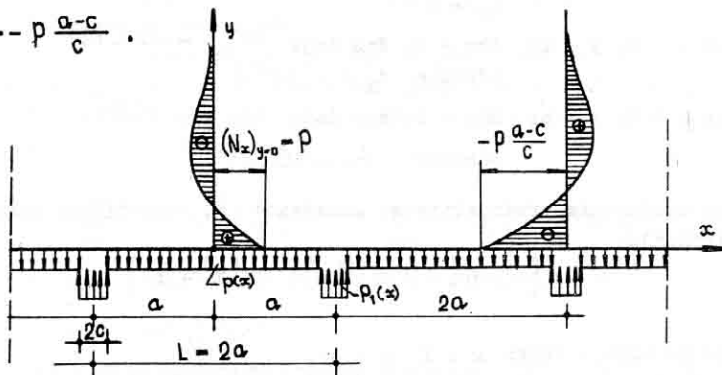
Dok je prvi član ovog izraza naša poznati obrazac za ugib konzole opterećene koncentrisanom silom na kraju, drugi član ovog izraza pretstavlja uticaj smičućih sila na deformaciju. Odnos ova dva člana za $v=0$ je $\frac{2l^2}{b^2}$. Za kratke elemente kod kojih je $b/l = 1/2$ uticaj smičućih sila na deformaciju je /za $v=0$ / oko 50%, dok je kod konzola kod kojih je $b/l = 1/5$ /opet za $v=0$ / ovaj uticaj svega 8%.

3. ZIDNI NOSAČ

3.1. Periodično opterećenje poluravnini

Posmatraćemo ploču čija je srednja ravan ograničena pravom $y=0$ (sl. 8), i koja se proteže u beskonačnost u području $y > 0$. Ploča je opterećena duž prave $y=0$ ravnomernim opterećenjem $p(x)$ i oslonjena na jednakim odstojanjima $2a$. Oslonačke sile uzimamo kao ravnomerno opterećenje intenziteta:

$$p_1 = -p \frac{a-c}{c}$$



Sl. 8

Grafični uslovi za opterećenje prema skici glase:

$$y = 0 : \quad N_y = p(x) \quad ; \quad N_{xy} = 0$$

Opterećenje periode $L = 2a$, dato izrazima.

$$-a < x < -(a-c) \quad p(x) = p_1 = -p \frac{a-c}{c}$$

$$-(a-c) < x < (a-c) \quad p(x) = p$$

$$(a-c) < x < a \quad p(x) = p_1 = -p \frac{a-c}{c} \quad ;$$

možemo razviti u Fourier-ov red i prikazati u obliku:

$$p(x) = \sum_n a_n \cos \lambda_n x \quad ; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad ,$$

gde je:

$$a_n = - \frac{2pa}{\bar{u}c} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin \frac{n\bar{u}c}{a}$$

pa je traženi uslov $(N_y)_{y=0} = p$ tada:

$$(N_y)_{y=0} = \sum_n a_n \cos n x ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

S obzirom da je $N_y = \frac{\partial F}{\partial x}$, mora i sama Airy-eva funkcija biti sačinjena u obliku:

$$F = \sum_n Y_n \cos \frac{n\bar{u}x}{a}$$

Ovaj oblik rešenja imali smo već kod pravougaone ploče napregnute na savijanje to je bio oblik tzv. M. Levijevog rešenja. Unoseći ovo rešenje u diferencijalnu jednačinu dobijamo, kao i ranije, za svako n , posle skraćivanja sa $\cos \frac{n\bar{u}x}{a}$, običnu homogenu diferencijalnu jednačinu IV reda.

$$Y_n^{IV} - 2 \cdot \frac{n\bar{u}^2}{a^2} \cdot Y_n'' + \frac{n^4 \bar{u}^4}{a^4} \cdot Y_n = 0$$

Rešenje ove jednačine možemo prikazati u obliku:

$$Y_n = \left(A_n + \frac{n\bar{u}y}{a} B_n \right) e^{-dny} + \left(C_n + \frac{n\bar{u}y}{a} D_n \right) e^{dny} \quad /27/$$

Kako za $y \rightarrow \infty$ presečne sile ne mogu imati beskonačne vrednosti, s obzirom da opterećenje na konturi $y=0$ predstavlja jedno ravnotežno opterećenje, to članovi sa e^{dny} u ovom rešenju moraju biti jednaki nuli, pa imamo:

$$F = \sum_n \frac{1}{d_n} (A_n + d_n y B_n) e^{-dny} \cos n x$$

Za presečne sile, dobijamo tada izraze:

$$N_x = \frac{\partial F}{\partial y^2} = \sum_n [(A_n - 2B_n) + \ln y B_n] e^{-\ln y} \cos \ln x$$

$$N_y = \frac{\partial F}{\partial x^2} = - \sum_n (A_n + \ln y B_n) e^{-\ln y} \cos \ln x$$

$$N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \sum_n [(A_n - B_n) + \ln y B_n] e^{-\ln y} \sin \ln x$$

Konstante A_n , B_n odredićemo iz graničnih uslova na konturi $y=0$:

$$(N_y)_{y=0} = - \sum_n A_n \cos \ln x = \sum_n a_n \cos \ln x$$

odnosno:

$$A_n = -a_n$$

$$(N_{xy})_{y=0} = 0 \quad B_n = A_n = -a_n$$

Sa ovim vrednostima za integracione konstante dobijamo za funkciju F izraz:

$$F = - \frac{a^2}{\bar{u}^2} \sum_n \frac{1}{n^2} a_n (1 + \ln y) e^{-\ln y} \cos \ln x$$

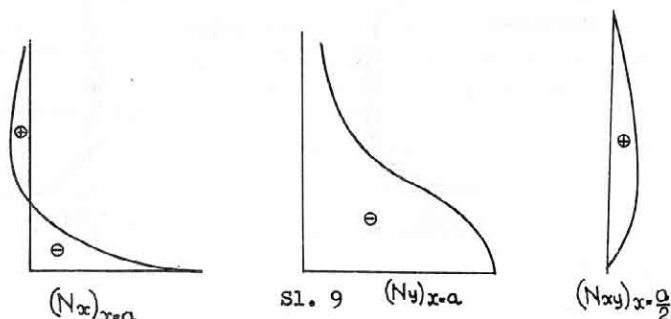
i zatim i izraze za presečne sile:

$$N_x = \sum_n a_n (1 - \ln y) e^{-\ln y} \cos \ln x$$

$$N_y = \sum_n a_n (1 + \ln y) e^{-\ln y} \cos \ln x$$

$$N_{xy} = \sum_n a_n \ln y e^{-\ln y} \sin \ln x$$

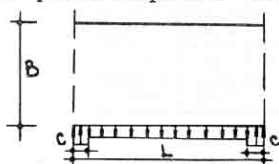
Za $y=0$, normalna sila N_x jednaka je normalnoj sili N_y .
 Dijagrami presečnih sila N_x , N_y i N_{xy} (odnosno napona σ_x , σ_y
 τ_{xy} ako veličine sila podelimo sa debljinom ploče h) dati su
 na sl. 9.



3.2 Naprezanje nosača zidova

Ploče konačne visine u pravcu y -ose, oslonjene na ovaj ili neki sličan način, nazivaju se u građevinskoj tehnici često nosači-zidovi, zidni nosači ili platna. Naprezanje ovakvih konstrukcija, zbog velikog odnosa visine prema rasponu, razlikuje se bitno od naprezanja grednih nosača. Ako bi prema primeru u prethodnoj tački tražili naprezanje ploče konačne visine u pravcu y -ose, dakle ustvari srednjeg polja jednog kontinualnog platna velike visine, morali bi u rešenju za funkciju F zadržati i drugi deo sa e^{ny} . Na taj način imali bi na raspolaganju još konstante C_n i D_n koje bi odredili na osnovu graničnih uslova duž gornje konture.

Ovakva rešenja za različite odnose visine ploče (v.sl.10) prema rasponu L dala bi sledeće rezultate:



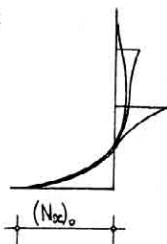
Sl.10

- a) Za ploče odnosa strana $B/L > 1$, dijagram sile N_x bio bi približno isti kao za ploču beskonačne visine.
- b) Za ploče odnosa strana $B/L < 0,45$ dijagram sile N_x sredi

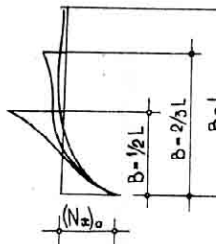
dini raspona približno se poklapa sa Navier-ovim dijagramom. Nad osloncem zavisno od širine oslanjanja ovaj dijagram odstupa dosta od trougaonog dijagrama po Navier-u. Na sledećoj skici

prikazani su oblici dijagrama N_x za $B/L = 1/2, 2/3$ i 1 a za $2c = 1/5L$.

nad
osloncem



u
polju



B/L	U POLJU			NAD OSLONCEM		
	y/B	$N_{x/p}$	NAVIER	y/B	$N_{x/p}$	NAVIER
1	0	1.002	0.240	0	-4.002	-0.360
	0.375	-0.194	0	0.25	0.396	0
	1	-0.088	-0.240	1	0.088	0.360
2/3	0	1.062	0.640	0	-4.062	-0.810
	~0.30	0	0	-0.15	0	0
	1	-0.470	-0.540	1	0.496	0.810
1/2	0	1.289	0.960	0	-4.302	-1.440
	~0.412	0	0	~0.20	0	0
	1	-1.032	-0.960	1	1.175	1.440

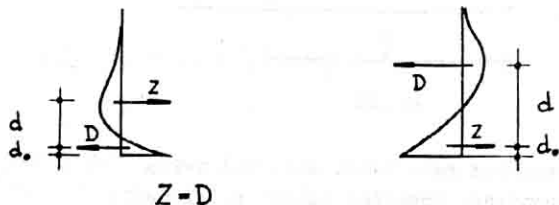
Za određivanje armature kod armiranja betonskih nosača potrebno je sračunati redukциони momenat normalnih sila N_x u pojedinim presecima (tj. napadni momenat), veličinu i položaj rezultante sila N_x u zatežućem i pritiskajućem delu dijagrama.

Iz veličine rezultante u zatežućem delu određuje se armatura, a njen položaj određuje raspored te armature.

Na skici (11) prikazane su rezultante u delu zatežućih i pritiskajućih normalnih sila N_x . Za odnos $B/L=1$; $2c/L=1/5$ date su ove veličine u sredini raspona i nad osloncem.

oslonac

polje

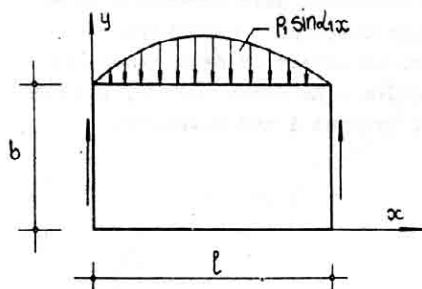


Sl. 11

	U SREDINI POLJA	NAD OSLONCEM	MULTIPL.
M	0.040	0.060	PL^2
Z	0.086	0.162	PL
d	0.462	0.370	B
d_0	0.060	0.030	B

3.3 Ploča oslonjena duž krajnjih preseka

Kao primer razmatraćemo pravougaonu ploču opterećenu duž konture /sl.12/ opterećenjem:



$$p(x) = p_n \sin n \pi x$$

$$dn = \frac{n\bar{u}}{l}$$

sl. 12

Raspored reaktivnih sila duž ivica $x=0$ i $x=l$ nije unapred propisan. Granični uslovi su sledeći:

$$x=0, x=l \quad N_x=0 \quad //28//$$

$$y=0 \quad N_y=0 \quad //29//$$

$$N_{xy}=0$$

$$y=b \quad N_y = -p(x) \quad //30//$$

$$N_{xy}=0$$

Airy-ovu funkciju pretpostavićemo u obliku $F = Y_n \sin \alpha x$
Izraz za funkciju Y_n (jednačina (27)) transformisaćemo za
rešenje ovog zadatka uvođenjem hiperboličkih funkcija, tako
da dobijamo:

$$F = \frac{1}{\alpha^n} (A_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y B_n \operatorname{sh} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y D_n \operatorname{ch} \alpha y) \sin \alpha x$$

Dvostrukim diferenciranjem dobijaju se presečne sile:

$$N_x = [(A_n + 2B_n) \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y B_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ + (C_n + 2D_n) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y D_n \operatorname{ch} \alpha y] \sin \alpha x$$

$$N_y = -(A_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y B_n \operatorname{sh} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ + \alpha y D_n \operatorname{ch} \alpha y) \sin \alpha x$$

$$N_{xy} = -[(A_n + B_n) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y B_n \operatorname{ch} \alpha y + \\ + (C_n + D_n) \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y D_n \operatorname{sh} \alpha y] \cos \alpha x$$

Izabranim rešenjem zadovoljeni su granični uslovi (28).

Uslovi (29) daju:

$$A_n = 0 \quad ; \quad D_n = -C_n$$

Uslovi na gornjoj konturi daju sledeće:

$$p_n = \alpha n b B_n \operatorname{sh} \alpha n b + C_n (\operatorname{sh} \alpha n b - \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b)$$

$$0 = B_n (\operatorname{sh} \alpha n b + \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b) - \alpha n b C_n \operatorname{sh} \alpha n b$$

pa dobijamo:

$$B_n = p_n \frac{\alpha n b \operatorname{sh} \alpha n b}{\operatorname{sh}^2 \alpha n b - \alpha n^2 b^2} ; \quad C_n = -D_n = p_n \frac{\operatorname{sh} \alpha n b + \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b}{\operatorname{sh}^2 \alpha n b - \alpha n^2 b^2}$$

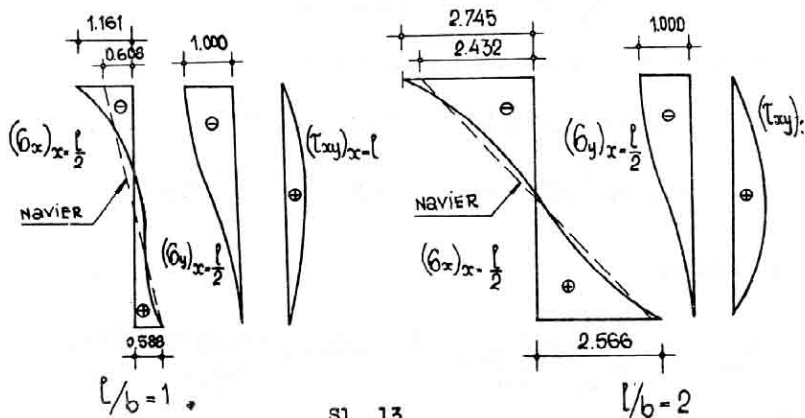
Unoseći vrednosti za konstante u izraze za presečne sile dobijamo:

$$N_x = p_n \frac{1}{\sin^2 \alpha n b - \alpha n^2 b^2} \left[\alpha n b \operatorname{sh} \alpha n b (2 \operatorname{ch} \alpha n y + \alpha n y \operatorname{sh} \alpha n y) - (\operatorname{sh} \alpha n b + \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b) (\operatorname{sh} \alpha n y + \alpha n y \operatorname{ch} \alpha n y) \right] \sin \alpha n x$$

$$N_y = - p_n \frac{1}{\sin^2 \alpha n b - \alpha n^2 b^2} \left[\alpha n b \operatorname{sh} \alpha n b (\alpha n y \operatorname{sh} \alpha n y) + (\operatorname{sh} \alpha n b + \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b) (\operatorname{sh} \alpha n b - \alpha n y \operatorname{ch} \alpha n y) \right] \sin \alpha n x$$

$$N_{xy} = - p_n \frac{1}{\sin^2 \alpha n b - \alpha n^2 b^2} \left[\alpha n b \operatorname{sh} \alpha n b (\operatorname{sh} \alpha n y + \alpha n y \operatorname{ch} \alpha n y) - \alpha n y \operatorname{sh} \alpha n y (\operatorname{sh} \alpha n b + \alpha n b \operatorname{ch} \alpha n b) \right] \cos \alpha n x$$

Na sl. /13/ pretstavljeni su dijagrami napona za odnose strana $l/b=1$ i $l/b=2$, $n=1$ i $p_1=1$. Već za vrednost $l/b=4$ odstupanja od Navier-ovog dijagrama su oko 2%. Kako su kod greda koje nose na savijanje ovi odnosi obično još i znatno veći može se uzeti da je kod njih Navier-ov dijagram potpuno tačan.



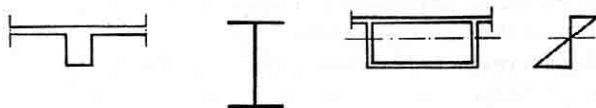
sl. 13

4. NOSAČI SA ŠIROKIM POJASEVIMA

Aktivna širina pojasa

Teorija savijanja grednih nosača, prema Bernoulijevoj pretpostavci, daje po širini preseka, tj. za tačke jednako udaljene od neutralne ose, ravnomeran raspored normalnih napona.

Za nosače T, I, sandučastog (sl. 14) ili sličnog preseka sa širokim pojasevima ovakav proračun nije opravdan. Stvaran raspored napona po širini pojasa, za koji se pretpostavlja da je male debljine u odnosu na širinu, nije ravnomeran.

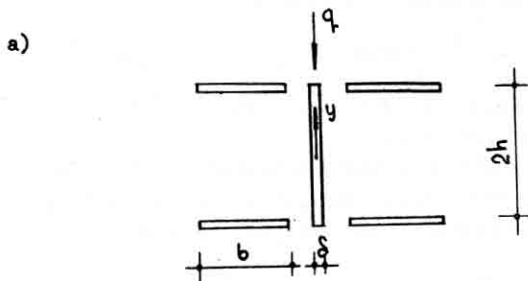


Sl. 14.

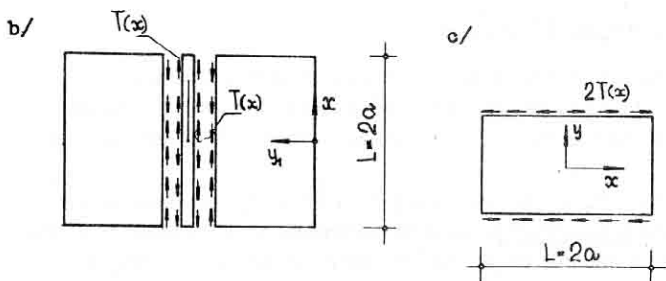
Pojasevi ovakvih nosača ponašaju se u stvari kao ploče napregnute u svojoj ravni.

Kao primer nosača sa širokim pojasevima uzećemo slobodno oslonjen nosač I preseka.

Izvršićemo dekompoziciju nosača na 5 nezavisnih ploča (rebro i pojasne ploče) za koje, s obzirom na karakter opterećenja (sl. 15a) smatramo da su napregnute samo u svojoj ravni.



Sl. 15a



Sl. 15 b, c

Na spoju rebra sa pojedinačnom pojasnom pločom nanećemo kao nepoznate veličine sile smicanja $T(x)$.

Duž sistema linije koja spaja pojasne ploče (u gornjoj ili donjoj zoni) javiće se u pojasevima i normalne sile N_y , koje s obzirom na simetriju nosača i opterećenja stoje u ravnoteži, i kao što ćemo kasnije videti, ne pojavljuju se eksplicitno kao granični uslov za pojasne ploče.

Sile T odredjuju se iz uslova jednakosti pomeranja u pravcu ose nosača za rebro i pojas duž linije kontakta. Ovaj uslov biće ispunjen ako su im jednake dilatacije, a mogućnost pomeranja pojasa ili rebra kao krutog tela uključena. Imajući na umu duplu simetriju poprečnog preseka i antimetričan karakter normalnih napona $\sigma_x = \frac{N_x}{S}$ u odnosu na x osu, pomenuti uslov može da se napiše u obliku:

$$\epsilon_x(\text{rebra})_{(y=b)} = \epsilon_x(\text{pojasa})_{(y=b)} \quad /31/$$

Izdvojeno iz sistema rebro je opterećeno zadatim opterećenjem q i nepoznatim silama $2T(x)$.

Za odredjivanje naprezanja usled osnovnog opterećenja q možemo se zadovoljiti približnim rešenjem rebra kao grednog nosača slobodno oslonjenog na krajevima, pa dobijamo:

$$\begin{aligned} N_y^0 &= 0 & N_{xy}^0 &= T_{xy}^0 \delta - \frac{3}{4} \frac{x}{h} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) q \\ N_x^0 &= \sigma_x S - \frac{M}{J} \delta y = -\frac{3}{2} \frac{y}{h^3} \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) q h^2 \end{aligned} \quad /32/$$

Radi daljnjeg računa prikazaćemo izraz /32/ za N_x^0 u obliku Fourierovog reda:

$$N_x^0 = -\frac{24}{\bar{u}^3} \cdot q a^2 \frac{y}{h^3} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cos \frac{n\bar{u}x}{2a}$$

Za $\mathcal{E}_{x(y=h)}^0$ dobijamo tada:

$$\mathcal{E}_{x(y=h)}^0 = \frac{N_x^0(h)}{E\delta} = -\frac{24}{E\delta} \frac{q a^2}{\bar{u}^3 h^2} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cos \frac{n\bar{u}x}{2a}$$

Isto tako pretpostavićemo da se nepoznate sile $T(x)$ mogu prikazati u obliku reda:

$$T(x) = \sum_n T_n \sin \frac{n\bar{u}x}{2a}$$

Za opterećenje rebra silama $2T(x)/sl.15c/$ posmatraćemo rebro kao ploču napregnutu u svojoj ravni.

Za Airy-evu funkciju usvojićemo izraz:

$$F = \sum_n Y_n \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\bar{u}}{2a}$$

Izraz za $Y_n(y)$ (vidi jednačinu (27)) ispisaćemo uvodeći hiperboličke funkcije, pa dobijamo:

$$F = \sum_n [(A_n + \alpha_n B_n y) \operatorname{ch} \alpha_n y + (C_n + \alpha_n D_n y) \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x$$

S obzirom na karakter opterećenja i jednačinu (12) izraz za smičuću silu $N_{xy} /sl.15c/$ biće parna funkcija od y . Da bi ovaj uslov bio ispunjen moraju konstante A_n i D_n biti jednake nuli, pa dobijamo:

$$F = \sum_n [\alpha_n B_n y \operatorname{ch} \alpha_n y + C_n \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x$$

Ovaj izraz zadovoljava na krajevima $x = \pm a$ uslov $N_x = 0$. Smičući naponi na krajevima nosača $x = \pm a$ čine ravnotežni sistem sila i ne utiču na veličinu reakcije usled osnovnog opterećenja $q(x)$.

Za određivanje konstanti B_n i C_n stoje nam na raspolaganju granični uslovi:

$$y=+h \quad N_y - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

$$N_{xy} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2T(x) \quad ,$$

što za svaki član reda daje po dve jednačine:

$$B_n \alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n h + C_n \operatorname{sh} \alpha_n h = 0$$

$$B_n (\alpha_n h \operatorname{sh} \alpha_n h + \operatorname{ch} \alpha_n h) + C_n \operatorname{ch} \alpha_n h = 2 \frac{T_n}{\alpha_n^2}$$

ili

	B_n	C_n	
	$\alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n h$	$\operatorname{sh} \alpha_n h$	0
	$\alpha_n h \operatorname{sh} \alpha_n h + \operatorname{ch} \alpha_n h$	$\operatorname{ch} \alpha_n h$	$2 \frac{T_n}{\alpha_n^2}$

pa dobijamo:

$$\Delta = \alpha_n h \operatorname{ch}^2 \alpha_n h - \alpha_n h \operatorname{sh}^2 \alpha_n h - \operatorname{ch} \alpha_n h \operatorname{sh} \alpha_n h \\ = \frac{1}{2} (2 \alpha_n h - \operatorname{sh} 2 \alpha_n h)$$

$$B_n = \frac{4}{\alpha_n^2} \cdot T_n \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_n h}{\operatorname{sh} 2 \alpha_n h - 2 \alpha_n h}$$

$$C_n = - \frac{4}{\alpha_n^2} \cdot T_n \cdot \frac{\alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{sh} 2 \alpha_n h - 2 \alpha_n h}$$

$$F_n = \frac{4 T_n}{\alpha_n^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} 2 \alpha_n h - 2 \alpha_n h} [\operatorname{sh} \alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n y - \\ - \alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n h \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x$$

i dalje:

$$E(\epsilon_x')_{y=h} - (\sigma_x^2)_{y=h} = \left(\frac{N_x^1}{\delta}\right)_{y=h} - \frac{E}{\delta} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=h}$$

$$E(\epsilon_x')_{y=h} - \frac{E}{\delta} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=h} = \frac{8}{\delta} \sum_n T_n \frac{\text{Sh}^2 d_n h}{\text{Sh} 2d_n h - 2d_n h} \cos d_n x$$

Ukupna dilatacija rebra je:

$$y=h: \quad \epsilon_x = \epsilon_x^0 + \epsilon_x^1.$$

Rešenje za pojas moramo uzeti u obliku:

$$F = \sum_n [(A_n + d_n B_n y_1) \text{Ch} d_n y_1 + (C_n + d_n D_n y_1) \text{Sh} d_n y_1] \cos d_n x$$

Integracione konstante odredjuju se iz uslova:

$$a) \text{ za } y_1=0; \quad N_y=0; \quad N_{xy}=0$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,$$

pa dobijamo:

$$A_n = 0 \quad \text{i} \quad C_n = -B_n$$

b) za $y_1=b$ je prema uslovu zadatke

$$N_{xy} = -T(x)$$

Zbog simetrije nosača i opterećenje u odnosu na ravan Oxy tačke duž prave $y=b$ nemaju pomeranje u pravcu y_1 -ose odnosno mora da bude:

$$(v)_{y=b} = 0$$

Imajući na umu već određene konstante pod a) dobijamo:

$$F_n = [B_n(dny \operatorname{ch} dny - \operatorname{sh} dny) + D_n dny \operatorname{sh} dny] \cos dnx$$

i zatim:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{y=b} = T_n - \alpha_n^2 [B_n dnb \operatorname{sh} dnb + D_n (\operatorname{sh} dnb + dnb \operatorname{ch} dnb)]$$

Izraz za pomeranje v izveli smo ranije:

$$Ev = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - v \frac{\partial F}{\partial y} + \Psi(x),$$

gde integraciona funkcija $\Psi(x)$ zajedno sa funkcijom $\phi(y)$ koja figurira u izrazu za u mora zadovoljiti jednačinu:

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + \frac{d\phi(y)}{dy} + \frac{d\Psi(x)}{dx} = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Za rešenje zadatka u obliku koji smo izabrali možemo se lako uveriti da se prethodna jednačina svodi na uslov:

$$\frac{d\phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

pa ove funkcije moraju biti iskazane u obliku:

$$\phi(y) = K_0 + K_1 y \quad ; \quad \Psi(x) = K_2 - K_1 x$$

i izražavaju pomeranja u_* i v_* ploče kao krutog tela.

Ako ta pomeranja isključimo, odnosno ako postavimo za pomeranje v_x uslov:

$$v_x(a, y_1) - v_x(-a, y_1) = 0 ,$$

tada je:

$$K_2 - K_1 = 0 ,$$

pa imamo:

$$Ev - \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}$$

Potražimo prethodno za n-ti član reda:

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial F_n}{\partial y} ;$$

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} = -\alpha_n^2 [B_n (\alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{sh} \alpha_n y) + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} = \alpha_n [B_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + D_n (\operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x$$

Integracijom prve jednačine nalazimo:

$$\int \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} dy = -\alpha_n [B_n (\alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y - 2 \operatorname{ch} \alpha_n y) + D_n (\alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{sh} \alpha_n y)] .$$

Granični uslov $(E v)_{y=b} = 0$ daje jednačinu

$$B_n [(1+\nu) \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n b - 2 \operatorname{ch} \alpha_n b] + D_n [(1+\nu) \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n b - (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_n b] = 0 ,$$

koja zajedno sa jednačinom/33/ čini sistem za određivanje konstanti B_n i D_n

Napisane u šemi ove jednačine glase:

B_n	D_n	
$d_n b \operatorname{Sh} d_n b$	$\operatorname{Sh} d_n b + d_n b \operatorname{Ch} d_n b$	$-\frac{T_n}{d_n^2}$
$(1+\nu)d_n b \operatorname{Sh} d_n b - 2 \operatorname{Ch} d_n b$	$(1+\nu)d_n b \operatorname{Ch} d_n b - (1-\nu)\operatorname{Sh} d_n b$	0

Determinanta sistema ravna je:

$$\begin{aligned} \Delta = & (1+\nu)(d_n b)^2 \operatorname{Sh} d_n b \operatorname{Ch} d_n b - (1-\nu) \operatorname{Sh}^2 d_n b - \\ & - (1+\nu) d_n b \operatorname{Sh}^2 d_n b + 2 \operatorname{Ch} d_n b \operatorname{Sh} d_n b - (1+\nu)(d_n b)^2 \operatorname{Sh} d_n b \operatorname{Ch} d_n b + \\ & + 2 d_n b \operatorname{Ch}^2 d_n b = 2 d_n b + \operatorname{Sh} 2 d_n b, \end{aligned}$$

a konstante B_n i D_n određene su izrazima:

$$B_n = \frac{T_n}{2 d_n b + \operatorname{Sh} 2 d_n b} \cdot \frac{1}{d_n^2} \left[(1-\nu) \operatorname{Sh} d_n b - (1+\nu) d_n b \operatorname{Ch} d_n b \right]$$

$$D_n = \frac{T_n}{d_n^2} \cdot \frac{(1+\nu) d_n b \operatorname{Sh} d_n b - 2 \operatorname{Ch} d_n b}{2 d_n b + \operatorname{Sh} 2 d_n b}$$

Dilatacija ϵ_x za $y_1 = b$ data je jednačinom:

$$E \epsilon_x = \frac{1}{\delta_1} (N_x - \nu N_y) = \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial F}{\partial x^2} \right)$$

gde je δ_1 debljina pojasa

Unošenjem izraza za $\frac{\partial F}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial F}{\partial x^2}$ nalazimo:

$$\begin{aligned} E \epsilon_x = & \frac{1}{\delta_1} \sum_n d_n^2 \left\{ \left[2 D_n + (1+\nu) B_n d_n b \right] \operatorname{Ch} d_n b + \right. \\ & \left. + \left[(1-\nu) B_n + (1+\nu) D_n d_n b \right] \operatorname{Sh} d_n b \right\} \cos d_n x \end{aligned}$$

i konačno kad unesemo vrednost za konstante B_n i D_n dobijamo izraz:

$$E(\epsilon_x) = \sum_n T_n \frac{(1-\nu^2) \text{Sh}^2 dnb - 4\text{Ch}^2 dnb - (1+\nu)^2 (dnb)^2}{\delta_1 (2dnb + \text{Sh} 2dnb)}$$

Izjednačavajući dilatacije rebra i pojasa u tačkama duž spojne prave dobijamo konačno za svaki član reda po jednu jednačinu iz koje se određuje konstanta T_n :

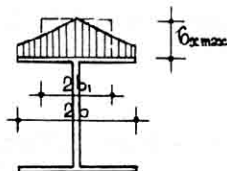
$$T_n \left\{ \frac{(1-\nu^2) \text{Sh}^2 dnb - 4\text{Ch}^2 dnb - (1+\nu)^2 (dnb)^2}{\delta_1 (2 \text{Sh} dnb + 2dnb)} - \frac{8 \text{Sh}^2 dnh}{\delta (\text{Sh} dnh - 2dnh)} \right\} = - \frac{24}{\bar{u}^3} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \frac{a^2}{h^2} q$$

$$n = 1, 3, 5 \dots$$

Za zadate odnose visine nosača i širine pojasa u odnosu na raspon iz gornje jednačine se određuje T_n , pa zatim sve integracione konstante i na kraju i naprežanje nosača.

Iz izraza za $\hat{\sigma}_x \delta_1 = N_x \cdot \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}$ lako je videti da normalni napon odnosno sile N_x nisu ravnomerno raspoređene po širini pojasa. Karakter te raspodele prikazan je na sl. 16.

Maksimalni napon javlja se u sredini.



Sl. 16

Kako se obično u proračunima shodno pretpostavci o ravnim presecima pretpostavlja ravnomerna raspodela normalnih napona po širini pojasa, postavlja se pitanje kako na jednostavan način uzeti ovu činjenicu u obzir. Uobičajeno je da se pri odredjivanju otpornog momenta preseka uzima manja širina pojasa u obzir odnosno umesto stvarne širine samo jedan njen deo. Ova širina $2b_1$ tzv.aktivna širina odredjuje se iz uslova da ukupnu silu koju prenosi pojas može preneti jedan njegov deo s tim što će se pretpostaviti da na širini $2b_1$ vlada maksimalni napon koji se javlja pri tačnom rešenju Tako imamo:

$$b_1 (\sigma_x)_{\max} = \int_0^b \sigma_x dy_1$$

ili

$$b_1 = \frac{\int_0^b N_x dy_1}{(N_x)_{\max}}$$

Nažalost, aktivna širina b_1 neće biti ista duž nosača, jer podintegralna funkcija neće za svako x dati istu vrednost. Ako se za približno odredjivanje aktivne širine zadovoljimo samo prvim članom $(n-1)$ reda, tada će aktivna širina biti konstanta za ceo nosač.

Tada imamo:

$$\frac{1}{T_n} (N_x)_{\max} = \frac{(1-\nu) \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4 \operatorname{ch}^2 \alpha b - (1+\nu)(\alpha b)^2}{(\operatorname{sh} 2\alpha b + 2\alpha b)}$$

gde se kratkoće radi izostavlja indeks 1 uz L .

Za N_x nalazimo:

$$\frac{1}{T_n} N_x = \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha b + 2\alpha b} \left[(1+\nu) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 2 \operatorname{ch} \alpha b \right] (2 \operatorname{ch} \alpha y_1 + \alpha y_1 \operatorname{sh} \alpha y_1) + \\ + \left[(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha b - (1+\nu) \alpha b \operatorname{ch} \alpha b \right] (\operatorname{sh} \alpha y_1 + \alpha y_1 \operatorname{ch} \alpha y_1)$$

Integrišući od 0 do b dobijamo:

$$\frac{1}{T_n} \int N_x dy_1 = -\frac{2}{\bar{u}}$$

Aktivna (ili neki put zvana sadejstvjuća širina b_1) data je prema tome izrazom:

$$b_1 = \frac{L}{\bar{u}} \frac{\text{sh} 2\alpha b + 2\alpha b}{4\text{ch}^2 \alpha b - (1-\nu)\text{sh}^2 \alpha b + (1+\nu)(\alpha b)^2},$$

gde je sa L obeleženo $2a$

Ovaj izraz da se prikazati i u obliku:

$$b_1 = \frac{L}{\bar{u}} \frac{\text{sh} 2\alpha b + 2\alpha b}{(3+\nu)\text{ch} 2\alpha b + \frac{1}{2}(1+\nu)(\alpha b)^2 + (5-\nu)}$$

U sledećoj tabeli prikazane su vrednosti aktivne širine za različite odnose b/L .

b/L	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
b_1/b	0.983	0.934	0.864	0.783	0.701	0.624	0.556	0.496	0.446	0.403

Usput možemo napomenuti da ovaj zaključak o aktivnoj širini važi i za grede T - preseka.

Odredjivanje aktivne širine složen je posao i za relativno jednostavne slučajeve. Ona zavisi kao što smo već delimično napomenuli

- od vrste nosača sa širokim pojasevima (sandučast presek, nesimetričan presek, zatim konstrukcija ploče sa rebrima i td.)
- od vrste opterećenja
- od graničnih uslova (slobodno oslanjanje, kontinualni nosač itd.)
- od mesta na nosaču.

Na osnovu ispitivanja različitih nosača i opterećenja u propise su unete vrednosti aktivne širine koje se uzimaju za bilo kakvo opterećenje (i manje više za sve vrste T ili duplo T preseka) a specificirane su obično na gredu sa slobodnim oslanjanjem i kontinualni nosač. Takvi su, naprimer, nemački propisi za spregnute konstrukcije. Radi ilustracije može se videti iz sledeće tabele da se ovi podaci za slobodno oslonjen nosač dobro slažu sa podacima iz prethodne tabele.

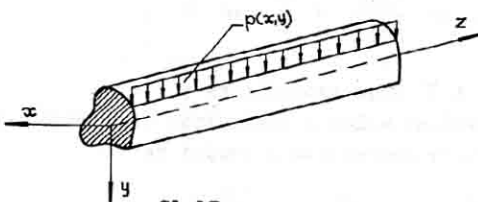
b/l	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
b_1/b	1.00	0.89	0.78	0.68	0.58	0.50

5. RAVNA DEFORMACIJA

U ovom poglavlju o pločama napregnutim u svojoj ravni spomenućemo i jedan problem, koji je doduše na prvi pogled sasvim različit, ali je, kako ćemo kasnije videti, u pogledu napreznje sličan, a u pogledu matematičke formulacije snalogen problemu ploče napregnute u svojoj ravni.

Reč je, nsime, o tzv. ravnoj deformaciji.

Zemislmo veoma dugačko telo cilindričnog oblike (gravitacione brana, potporni zid itd.) opterećeno poprečnim silama (uključujući aktivne i reaktivne sile) jednako raspoređenim po dužini.



Sl.17

Za ovakvo telo možemo pod dejstvom napred opisane opterećenje pretpostaviti da tačke poprečnog preseka koji je dovoljno udaljen od osnove ostaju posle deformacije u ravni poprečnog preseka. Drukčije rečeno, tačke poprečnog preseka imaju samo komponente pomeranja u ravni x, y i ova pomeranja biće nezavisne od položaja tačke u pogledu na z -osu tj.

$$w=0 ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}$$

Shodno učinjenim pretpostavkama, imamo:

$$\epsilon_z = 0 ; \quad \gamma_{zx} = 0 ; \quad \gamma_{zy} = 0$$

Korišćenjem Hukovog zakona nalszimo:

$$\begin{aligned} E \epsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 ; \quad \text{odn.} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad /35/ \\ E \epsilon_x = (1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y \end{aligned}$$

$$E\varepsilon_y = (1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x$$

$$E\gamma_{xy} = 2(1+\nu)\tau_{xy}$$

Kako su sve komponente deformacije nezavisne od Z , to je i :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0$$

Navier-ove jednačine svode se na:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad /36/$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 , \quad /37/$$

gde su X i Y ovde zapreminske sile.

Saint-Venant-ov uslov o poklapanju deformacija isti je kao i u slučaju ploče napregnute u svojoj ravni:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Ako u ovu jednačinu unesemo izrse za napon, dobijamo:

$$(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Diferenciranjem Navier-ovih jednačina, i to prve po x a druge po y , i njihovim sabiranjem nalszimo:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} ,$$

a sabiranjem ove jednačine sa prethodnom jednačinom:

$$(1-\nu) \Delta(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad /38/$$

gde je:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$$

Jednačine 36,37,38 pretstavljaju sistem jednačina kojima je definisan problem ravne deformacije.

Za zapreminske sile pretpostavićemo da su konzervativne, odnosno da se mogu izraziti kao izvodi funkcije potencijala U :

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} ; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Es Airy-ovu $F(x,y)$ funkciju ćemo sada, s obzirom da smo uveli zapreminske sile, pretpostaviti da je:

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}$$

Tada iz uslova ravnoteže nalazimo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_x - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - U \right) = 0$$

$$i \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(G_y - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - U \right) = 0$$

pa možemo pisati:

$$G_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U ; \quad G_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U$$

Unesemo li ove izraze u jednačinu (38) dobijemo konačno diferencijalnu jednačinu ravne deformacije:

$$\Delta \Delta F + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta U = 0$$

Za konstantne zapreminske sile ove jednečine se svodi na:

$$\Delta \Delta F = 0$$

i poklepa se odgovarajućom jednečinom ploče napregnute u svojoj ravni.

Rezlike postoje u veličini normalnog napona σ_z za koji se kod ploče napregnutih u svojoj ravni pretpostavlja da je jednak nuli. Za slučaj ravne deformacije veličina napona σ_z data je izrazom (35).

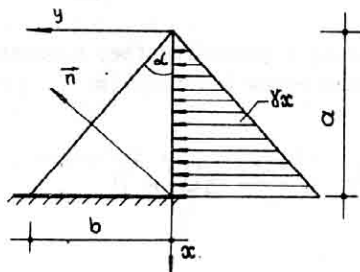
Ako je za dati materijal Poissonov broj jednak nuli, što se često uzima kod betonskih konstrukcija, tada se ravan problem (tj. problem ploče napregnute u svojoj ravni) i ravne deformacije ne razlikuju u pogledu naprezanja bez obzira na prirodu zapreminskih (odnosno površinskih) sila.

Jedan primer ravne deformacije
za trougsonu oblast

Dugo telo trougsonog poprečnog preseka, kako je to prikazano na slici 18 opterećeno je hidrostatičkim pritiskom γx duž konture $y=0$.

Duž kose konture sa normalom \vec{n} ne deluje nikakvo opterećenje.

Na konturu $y=a$ deluje reaktivno opterećenje podloge o čijem se rasporedu ništa ne pretpostavlja.



Sl.18

Airy-eva funkcija ovako definisnog problema je sledeća:

$$F = \gamma \left[(\eta - 1) \frac{x^3}{6} + \frac{a^2}{2b^2} xy^2 - \left(2 \frac{a^2}{b^2} - \eta \right) \frac{a}{b} \frac{y^3}{6} \right],$$

gde je:

$$\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Funkciju potencijale U s obzirom da je $\chi = \frac{\partial U}{\partial x} = \gamma_1$ data je sa

$$U = -\gamma_1 x - \eta \gamma x$$

Komponentalni naponi dati su tada izrazima:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U = \gamma \left(\frac{a^2}{b^2} - \eta \right) x - \left(2 \frac{a^2}{b^2} - \eta \right) \frac{a}{b} y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U = -\gamma x$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\gamma \frac{a^2}{b^2} y$$

Funkcija F izabrana je tako da je zadovoljena diferencijalna jednačina i granični uslovi na stranama $y=0$ i $y = \frac{b}{a} x$.
Naime, za $y=0$ imamo:

$$\sigma_y = -\gamma x; \quad \tau_{xy} = 0$$

Normala na stranu $y = \frac{b}{a} x$ zaklepa uglove čiji su kosinusi:

$$\cos(n, x) = -\sin \alpha$$

$$\cos(n, y) = \cos \alpha$$

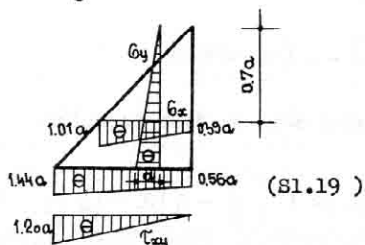
Ako ovo imamo u vidu i napišemo izraze za P_x i P_y (Košijeve jednačine) duž te konture videćemo da su veličine P_x i P_y jednake nuli, kao što i treba duž neopterećene strane.

Za stranu $x=c$ usvojena funkcija F daje sledeće naponi:

$$(\sigma_x)_a = \gamma \left[a \left(\frac{a^2}{b^2} - \eta \right) - y \left(2 \frac{a^2}{b^2} - \eta \right) \frac{a}{b} \right]$$

$$(\tau_{xy})_a = -\gamma y \frac{a^2}{b^2}$$

Na priloženoj skici prikazani su naponi u pojedinim preseccima za odnos strana $\frac{a}{b} = 1.2$ i $\eta = 2$.



Ne treba posebno napominjati da ovi izrazi vsže i za trougao-
nu ploču sa istim graničnim uslovima.

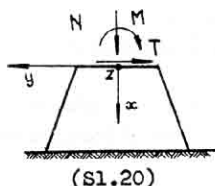
Prikazano resenje daje izvesnu sliku o naprezenju konstrukcije prizmatičnog oblika čiji je poprečni presek trougao-
ovskvog oblika. Medju građevinskim konstrukcijama u tu oblast
spadaju izmedju ostalog i gravitacione brane.

U stvarnosti, medjutim, za ovakve konstrukcije različitih
poprečnih preseka, veličine reaktivnog opterećenja duž kontakte
konstrukcije i temel nogtla zavisi od deformacije tla. Drugim
rečima uslovi duž ovog kontakte su dati po pomeranjima.

Jedna tačnije analiza ravne deformacije konstrukcije ovog
tipa pretstavlja relativno slozen zadatak iz ove oblasti.

Često puta se u približnim proračunima gravitacionih, (a
slično tome i brane olekšenog tipa), polazi od jednostavne pre-
dpostavke o linearnoj raspodeli normalnih napona σ_x (sl.20)
duž preseka $x = \text{const}$.

Sve spoljne sile (vidi sl. 20) iznad preseka $x = \text{const}$ re-
dukovane na težište poprečnog preseka daju momenat savijanja
 M i jednu komponentu u ravni preseka T i drugu upravno na
presek N .



Polazeći od linearne raspodele normalnih napona, dobijemo:

$$\sigma_x = -\frac{N}{F} + \frac{M}{J} y$$

gde je sa F obeležena površina poprečnog preseka na jedinici dužine brane, a sa J moment inercije oko ose Z . Za odredjivanje napona τ_{xy} i σ_y stoje nam na raspolaganju Navier-ove jednačine. Rešenjem ovih jednačina uz odgovarajuće granične uslove nalazimo napone τ_{xy} i σ_y .

Tačnije rešenje ovog zadatka pokazuje da uvedena pretpostavka nije opravdana i da je ovakav proračun samo orijentacioni u odnosu na stvaran raspored normalnih i smičućih napona.

6. RAVAN PROBLEM U
POLARNIM KOORDINATAMA
 6.1 Opšte

Problem ploče napregnute u svojoj ravni u Dekartovim koordinatama za $X=Y=0$ svodi se na rešenje diferencijalne jednačine:

$$\Delta \Delta F = 0$$

uz odgovarajuće granične uslove.

Presečne sile bile su date izrezima:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} ; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Po analogiji se problemom ploče napregnute na savijanje koji se svodio na rešenje nehomogene diferencijalne jednačine:

$$\Delta \Delta W = \frac{Z}{K}$$

uz odgovarajuće granične uslove, gde je u dekartovim koordinatama:

$$\Delta \Delta W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} ,$$

u polarnim koordinatama:

$$\Delta \Delta W = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) ,$$

diferencijalne jednačine ploče napregnute u svojoj ravni u polarnim koordinatama glasiće:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

Presečne sile date su tada izrezima:

$$N_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$N_{\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$N_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

Za slučaj rotaciono simetričnog natezanja, odnosno za slučaj da presečne sile ne zavise od koordinata φ imamo:

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = 0 \quad /39/$$

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \quad ; \quad N_{\varphi} = \frac{d^2 F}{dr^2} \quad ; \quad N_{r\varphi} = 0$$

Diferencijska jednačina /39/ u razvijenom obliku glasi:

$$\frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dF}{dr} = 0$$

Opšte rešenje ove jednačine može se napisati u obliku:

$$F = D + A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r$$

gde su D, A, B i C proizvoljne integracione konstante.

Za presečne sile dobijemo izraz:

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = A \frac{1}{r^2} + 2B + C(1 + 2 \ln r)$$

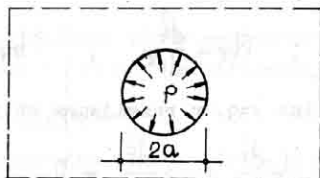
$$N_{\varphi} = \frac{d^2 F}{dr^2} = -A \frac{1}{r^2} + 2B + C(3 + 2 \ln r)$$

$$N_{r\varphi} = 0$$

6.2 Naprezanje beskonačne ploče sa kružnim otvorom opterećene r radijalnim opterećenjem po obimu otvora

Posmatraćemo jednostavan slučaj naprezanja beskonačne ploče opterećene rotaciono simetričnim opterećenjem prema sl. 21 .

Ovaj zadatak može da se shvati i kao ravna deformacija tela beskonačnih dimenzija /relativno veoma velikih dimenzija u odnosu na poluprečnik otvora/ sa cilindričnim otvorom /cevi/ opterećenog radijalnim opterećenjem.



Sl. 21

S obzirom da opterećenje p pretst vlja ravnotežan sistem sila možemo pretpostaviti da će naprezanje ploče opadati sa ostojanjem od otvora. Naprezanje ploče je rotaciono simetrično i integracione konstante rešenja

$$F = D + A \lg r + Br^2 + Cr^2 \lg r$$

odredićemo iz graničnih uslova:

$$r = a, \quad N_r = -p,$$

a za $r \rightarrow \infty$ moraju presečne sile N i N_φ biti jednake nuli. Da bi granični uslovi za $r \rightarrow \infty$ bili zadovoljeni moraju integracione konstante B i C biti ravne nuli.

Iz uslova $r = a \quad N_r = -p$

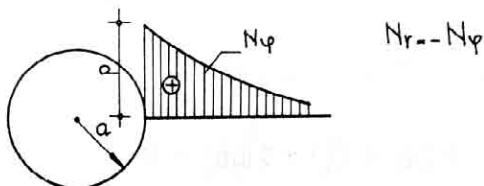
dobijamo tada:

$$A \frac{1}{a^2} = N_r = -p \quad ; \quad A = -pa^2$$

pa su presečne sile određene izrazima:

$$N_r = -p \frac{a^2}{r^2} \quad N_\varphi = p \frac{a^2}{r^2}$$

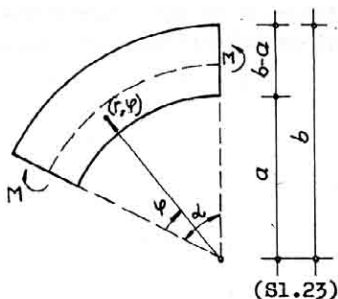
Dijagram presečnih sila dat je na sl.(22)



(Sl.22)

6.3 Čisto savijanje kružnog luka

Naprezenje kružnog luka momentima M na krejevima ima takodje rotaciono simetričan karakter. (sl.23)



(Sl.23)

Grenični uslovi za ovaj problem su sledeći:

$$r=a, r=b \quad N_r = 0$$

/40/

na stranama $\varphi = 0$ i $\varphi = \alpha$

$$-M = \int_{r=a}^{r=b} N \varphi r dr \quad ; \quad \int_{r=a}^{r=b} N \varphi r dr = 0 \quad /41/$$

Uslov za sile N_r duž linija $r=a, r=b$ daje

$$A \frac{1}{a^2} + 2B + C(1 + 2 \lg a) = 0$$

i

$$A \frac{1}{b^2} + 2B + C(1 + 2 \lg b) = 0$$

Prvi od uslova /41/ daje:

$$-M = \int_a^b \left[A \frac{1}{r^2} + 2B + C(3 + 2 \lg r) \right] r dr =$$

$$- A \lg \frac{b}{a} + (B + C)(b^2 - a^2) + C(b^2 \lg b - a^2 \lg a)$$

dok je drugi uslov identički zadovoljen.

Rešenjem sistema jednačine sastavljenog od ove i prethodne dve jednačine dobijamo vrednosti za integracione konstante:

$$A = - \frac{4a^2 b^2 \lg \frac{b}{a}}{N} M$$

$$B = - \frac{b^2 - a^2 + 2(b^2 \lg b - a^2 \lg a)}{N} M$$

$$C = - \frac{2(b^2 - a^2)}{N} M ,$$

gde je:

$$N = (b^2 - a^2) - 4a^2 b^2 \left(\lg \frac{b}{a} \right)^2$$

Kad uvedemo izraze za integracione konstante u izraze za sile u preseccima dobijemo:

$$N_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{b}{a} + b^2 \lg \frac{r}{b} + a^2 \lg \frac{a}{r} \right)$$

$$N_\varphi = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{b}{a} + b^2 \lg \frac{r}{b} + a^2 \lg \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right)$$

$$N_{r\varphi} = 0$$

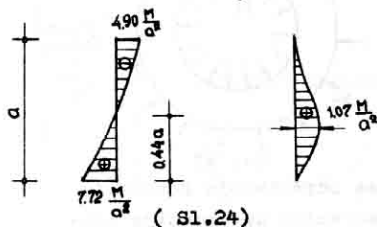
Najveće sile N_φ biće za $r=a$ odnosno $r=b$ /sl 24/. Presečne sile N_r su u svim tačkama istoga znaka. Za luk kod koga je $b=2a$ imamo:

$$(N_\varphi)_{\min} = -4.90 \frac{M}{a^2}$$

$$(N_r)_{\max} = 1.07 \frac{M}{a^2}$$

$$(N_\varphi)_{\max} = 7.72 \frac{M}{a^2}$$

Na slici (22) dat je raspored sile N_r i N_φ po poprečnom preseccu. Vidi se da je neutralna linija pomena nedole, i da dijagram N_r prilično odstupa od pravolinijskog.



Preme računu za gredni noseč imali bi: $W = \frac{1a^2}{6}$

$$N_{r \max} = \frac{M}{W} = \pm 6 \frac{M}{a^2}$$

Rezumljivo da sa smanjenjem odnosa $\frac{b-a}{b}$ ova razlika u dijagramima je sve manja tako da je već za $\frac{b-a}{b} = \frac{1}{5}$ pretpostavka o linearnoj raspodeli napona dovoljno tačna za praktičan proračun.

Kružni prsten pod ravnomernim radijalnim opterećenjem

Kružni prsten je opterećen ravnomernim radijalnim opterećenjem spolja i iznutra sl. /25/. To opterećenje izaziva rotaciono simetrično stanje napona i deformacija.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je:

$$F = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D$$

Presečne sile date su izrazima:

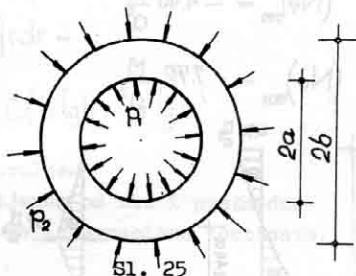
$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{A}{r^2} + 2B + C(1+2 \ln r)$$

$$N_\varphi = \frac{d^2F}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B + C(3+2 \ln r)$$

Granični uslovi su sledeći:

$$r=a \quad N_r = -P_1 \quad /42/$$

$$r=b \quad N_r = -P_2 \quad /43/$$



Potreban je još jedan uslov za određivanje konstanti A, B i C. Taj uslov dobićemo razmatranjem deformacije ploče. Komponente deformacija za slučaj rotacione simetrije date su izrazima:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} ; \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} ; \quad \chi_{r\varphi} = 0$$

pa je:

$$u = r \varepsilon_{\varphi}$$

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_{\varphi} + r \frac{d\varepsilon_{\varphi}}{dr}$$

i dalje:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\varphi} + r \frac{d\varepsilon_{\varphi}}{dr} \quad /44/$$

Koristeći vezu napona i deformacija

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\varphi})$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \nu \sigma_r)$$

uslov /44/ postaje:

$$(1+\nu)(\sigma_{\varphi} - \sigma_r) + r \left(\frac{d\sigma_{\varphi}}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = 0 \quad /45/$$

Kada u /45/ unesemo vrednosti za napone $\sigma_r = \frac{Nr}{h}$ i $\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h}$ dobija se:

$$2(1+\nu) \left(C - \frac{A}{r^2} \right) + 2r \left[\frac{A}{r^3} + \frac{C}{r} + \nu \left(\frac{A}{r^3} - \frac{C}{r} \right) \right] = 0$$

Posle sredjivanja dobijamo:

$$C = 0$$

Jednačine /42/ i /43/ postaju:

$$A \frac{1}{a^2} + 2B = -p_1$$

$$A \frac{1}{b^2} + 2B = -p_2 \quad ,$$

pa je:
$$A = - \frac{P_1 - P_2}{b^2 - a^2} a^2 b^2$$

$$B = - \frac{P_2 b^2 - P_1 a^2}{2(b^2 - a^2)}$$

Kada uvedemo izraze za integracione konstante u izraze za presečne sile dobijamo:

$$N_r = - \frac{P_2 b^2 - P_1 a^2}{b^2 - a^2} - \frac{P_1 - P_2}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}$$

$$N_\varphi = - \frac{P_2 b^2 + P_1 a^2}{b^2 + a^2} + \frac{P_1 - P_2}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}$$

1. slučaj $P_1 = 0$

$$N_r = - \frac{P_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$N_\varphi = - \frac{P_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

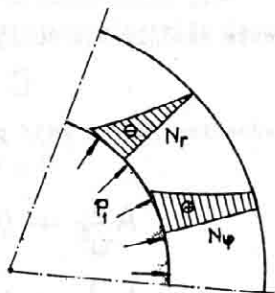
2. slučaj $P_2 = 0$

$$N_r = \frac{P_1 a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

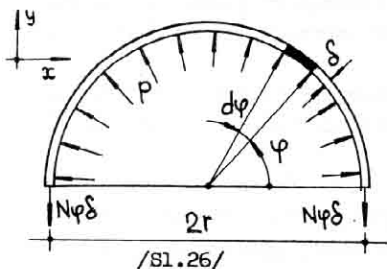
$$N_\varphi = \frac{P_1 a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$(N_r)_{\min}^{r=a} = - P_1$$

$$(N_\varphi)_{\max}^{r=a} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} P_1$$



Dobijene vrednosti za presečne sile upoređićemo sa vrednostima po kotlovskoj formuli sl./26/ /koja važi kada je debljina mala u odnosu na poluprečnik prstena/.



$$\sum Y = 0$$

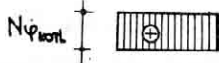
$$\int_0^{\pi} p r \sin \varphi d\varphi - 2 N_{\varphi} \delta = 0$$

$$-p r \cos \varphi \Big|_0^{\pi} - 2 N_{\varphi} \delta = 0$$

$$N_{\varphi} = \frac{p r}{\delta}$$

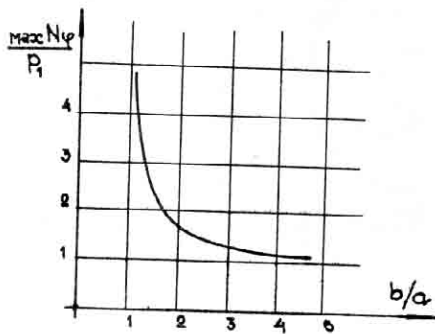
Na sledećoj tabeli date su ove razlike u procentima i u zavisnosti od odnosa b/a.

b/a	Δ [%]
2.00	39
1.50	23
1.20	11
1.10	5
1.01	1



$$\Delta = \frac{N_{\varphi_{\max}} - N_{\varphi_{\text{kott}}}}{N_{\varphi_{\max}}} \cdot 100 \quad [\%]$$

Odnos $\frac{\max N_{\varphi}}{P_1}$ u zavisnosti od količnika b/a dat je na slici 27.



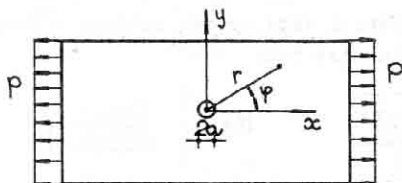
Sl. 27

Aksijalno napregnuta ploča oslabljena
kružnim otvorom

Posmatraćemo aksijalno napregnutu ploču oslabljenu otvorom /sl.28/ čiji je prečnik znatno manji od širine ploče.

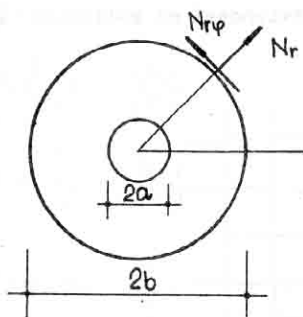
Polazeći od Saint Venantovog principa o rasprostiranjju napona izazvanih ravnotežnim sistemom sila može se učiniti sledeća pretpostavka:

U tačkama kruga poluprečnika $b \gg a$ vlada neporemećeno naponsko stanje tj. javljaju se samo normalni naponi σ_x koji odgovaraju aksijalno napregnutoj ploči bez otvora.



Sl. 28

Posmatraćemo sada prstenastu ploču spoljnjeg poluprečnika b i unutrašnjeg a izdvojenu iz pravougaone ploče /sl. 29/.



Sl. 29

Duž konture b je takva ploča napadnuta samo silom $N_r \cdot p$. Transformacijom na sistem polarnih koordinata dobijamo:

$$N_r = \sigma_r h = p \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} p (1 + \cos 2\varphi)$$

$$N_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} h = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi$$

Prvi deo radijalnog opterećenja N_r ima rotaciono simetričan karakter i rešenje za ovaj slučaj opterećenja dat je u prethodnoj tački /2. slučaj/.

Pretpostavljamo da su za ostali deo opterećenja presečne sile date izrazima oblika:

$$N_r = N_r(r) \cos 2\varphi$$

$$N_{r\varphi} = N_{r\varphi}(r) \sin 2\varphi,$$

tada se može pretpostaviti naponska funkcija u obliku:

$$F = f(r) \cos 2\varphi$$

Unošenjem ovog izraza u diferencijalnu jednačinu $\Delta \Delta F = 0$ i posle skraćivanja sa $\cos 2\varphi$ dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu sa promenljivim koeficijentima:

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df}{dr} = 0$$

Uvodeći novu promenljivu zamenom $r = e^t$ dobijemo običnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^4 f}{dt^4} - 4 \frac{d^3 f}{dt^3} - 4 \frac{d^2 f}{dt^2} + 16 \frac{df}{dt} - 0$$

Rešenje ove jednačine glasi:

$$f = A + B e^{-2t} + C e^{2t} + D e^{4t}$$

odnosno:

$$f = A + B \frac{1}{r^2} + C r^2 + D r^4$$

Tada su funkcije F i presečne sile N_r , N_φ i $N_{r\varphi}$ dati izrazima:

$$F = (A + B r^{-2} + C r^2 + D r^4) \cos 2\varphi$$

$$N_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = -(2C + 6B r^{-4} + 4A r^{-2}) \cos 2\varphi$$

$$N_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = (2C + 12D r^2 + 6B r^{-4}) \cos 2\varphi$$

$$N_{r\varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = (2C + 6D r^2 - 6B r^{-4} - 2A r^{-2}) \sin 2\varphi$$

Integracione konstante A , B , C i D u opštem rešenju određujemo iz konturnih uslova:

$$r = a \quad N_r = 0$$

$$N_{r\varphi} = 0$$

$$r=b \quad N_r = \frac{1}{2} p \cos 2\varphi$$

$$N_{r\varphi} = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi$$

odnosno:

$$2C + 6Ba^{-4} + 4Aa^{-2} = 0$$

$$2C + 6Da^2 - 6Ba^{-4} - 2Aa^{-2} = 0$$

$$2C + 6Bb^{-4} + 4Ab^{-2} = -\frac{1}{2}p$$

$$2C + 6Db^2 - 6Bb^{-4} - 2Ab^{-2} = -\frac{1}{2}p$$

uz korišćenje da $\frac{a^2}{b^2} \rightarrow 0$ konstante postaju:

$$D=0$$

$$C = -\frac{1}{4}p$$

$$B = -\frac{1}{4}a^4p$$

$$A = \frac{1}{2}a^2p$$

Superpozicijom ovog rešenja sa rešenjem za rotaciono simetrično opterećenje dobijemo izraze za presečne sile:

$$N_r = \frac{1}{2}p\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}p\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi$$

$$N_{r\varphi} = \frac{1}{2}p\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}p\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi$$

$$N_{r\varphi} = -\frac{1}{2}p\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi$$

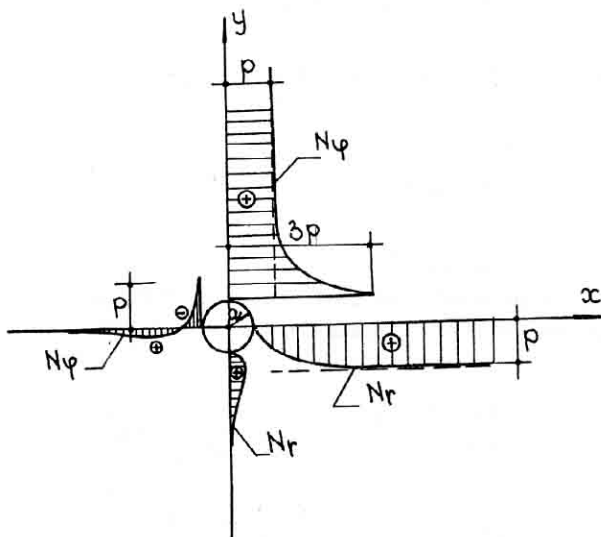
Najveće sile nastaju duž otvora, za $r=a$ i $\varphi = \bar{u}/2$

$$N_{r\varphi} = 0$$

$$\max N_{\varphi} = \delta p$$

$$N_r = 0$$

U poredjenju sa pločastim nosačem bez otvora povećava se presečna sila N_{φ} do trostruke vrednosti. Na sl. (30) prikazan je tok presečnih sila duž preseka $\varphi=0$ i $\varphi=\bar{u}/2$.



Sl. 30